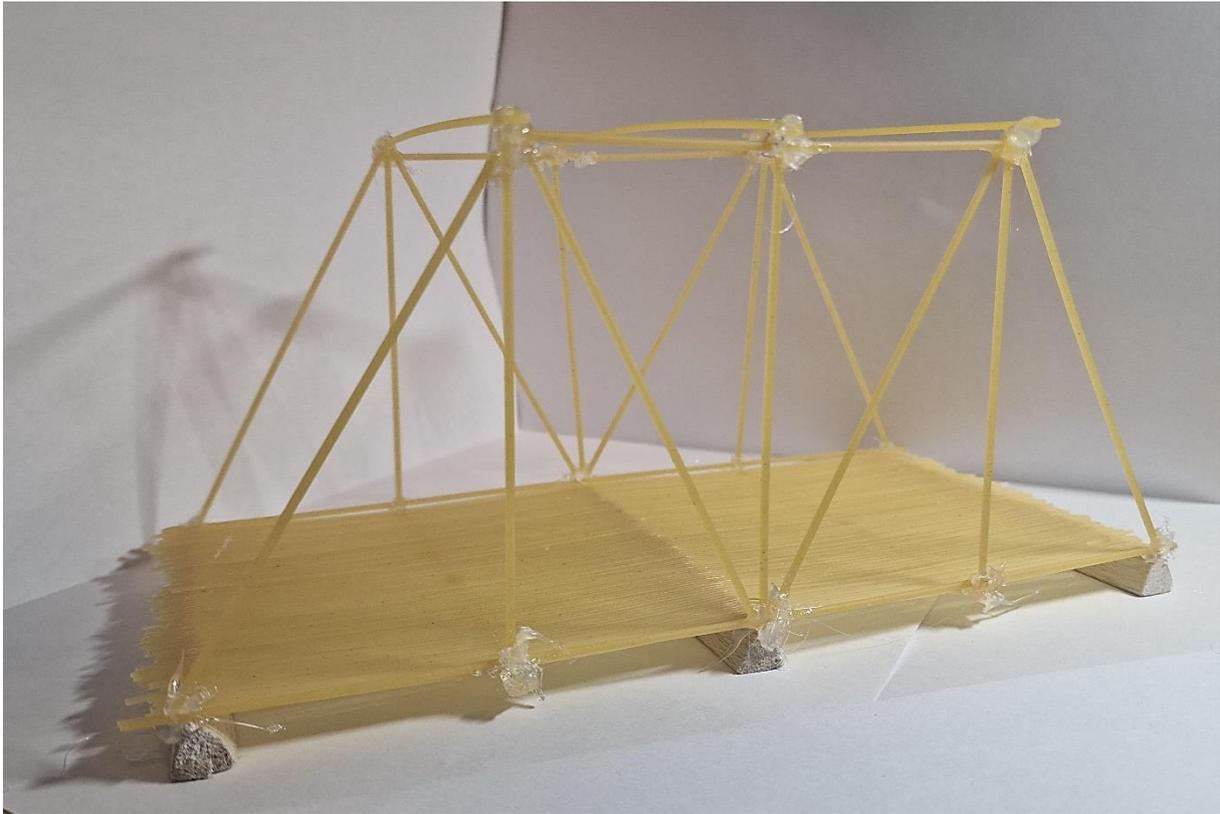


Brückenbau

Design und Analyse von Spaghettibrücken



Maturaarbeit

Duran Veseloski, 4nc

Duran.Veseloski@edu.sh.ch

Kantonsschule Schaffhausen

Betreuungsperson: Kavian Davallou

Abgabedatum: 3. Dezember 2024

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung	1
0.1 Motivation	1
0.2 Einführung in die Thematik	1
0.3 Leitfrage	2
1. Theorie von Brücken	3
1.1 Grundbegriffe zur Statik und Festigkeitslehre	3
1.1.1 Äussere Kräfte: Belastungsarten [1]	3
1.1.2 Wichtige Grössen in der Baustatik.....	4
1.1.3 Mechanische Eigenschaften von Materialien bei Biegung.....	7
1.1.4 Durchbiegung (Deflection)	11
1.2 Balkentheorie bzw. Bernoullitheorie	12
1.2.1 Bernoullische Annahmen	12
1.3 Träger auf zwei Stützen bzw. Auflager	16
1.3.1 Auflagerarten: Los- und Festlager	16
1.3.2 Berechnung der Schnittgrössen (Querkraft und Biegemoment) [25]	18
1.4 Cross Verfahren und FEM	22
1.4.1 Einführung und wichtigste Begriffe [30, 31, 32, 33]	23
1.4.2 Vorgang beim Cross – Verfahren [31].....	26
1.4.3 FE-Methode (FEM) [34]	27
2. Versuchsdurchführungen	28
2.1 Bau von Spaghettibrücken	28
2.1.1 Spaghettibrücke aus zwei Stützen (1)	28
2.1.2 Capellinibrücke aus drei Stützen (2, 3).....	31
2.1.3 Capellinibrücke aus drei Stützen (4, 5).....	35
2.1.5 Capellinibrücke aus zwei Stützen (6)	37
2.1.6 Zusammenfassung der Versuchsdurchführungen.....	40
3. Resultate	41
3.1 Bruchstellen der Brücken	41
3.1.1 Spaghetti Brücke (1)	41
3.1.2 Capellini Brücke (2,3).....	42
3.1.3 Cappellini Brücke (4,5).....	43
3.1.4 Capellinibrücke (6)	45
3.1.5 Fachwerkbrücke (7)	46
3.1.6 Zusammenfassung der Resultate	47
3.2 Berechnungen von Hand und mit FEM	48

3.2.1 Berechnungen am Einfeldträger.....	49
3.2.2 Berechnungen am Zweifeldträger	57
4. Diskussion.....	67
4.1 Vergleich: Statik-Programm und Handrechnung	67
4.1.1 Vergleich des Einfeldträgers	67
4.1.2 Vergleich des Zweifeldträgers	68
4.2 Vergleich: Bruchstellen: Theorie und Praxis.....	69
4.2.1 Bruchstellenvergleich des Einfeldträgers.....	69
4.2.2 Bruchstellenvergleich des Zweifeldträgers	70
4.2.3 Interpretation der Abweichungen	71
4.3 Vergleich: Belastbarkeit: Fachwerkbrücke und Träger mit drei Stützen	74
5. Fazit.....	76
6. Literaturverzeichnis.....	78
7. Abbildungsverzeichnis.....	81
8. Anhang	84

0. Einleitung

0.1 Motivation

Brücken haben mich seit der Kindheit fasziniert und beeindruckt mich jeden Tag erneut. Ich habe mir immer schon viele Fragen gestellt:

- 1) Wie schafft es eine Brücke, eine solche enorme Last zu tragen?
- 2) Was trägt zu dieser Stabilität bei?
- 3) Könnte man eine tragfähige Brücke aus Spaghetti bauen?

...

Und die Liste ist noch lang. Diesen Fragen wollte ich als neugieriges Kind immer näher auf dem Grund gehen. Jedoch hat mir dafür das physikalische Verständnis gefehlt. Deshalb erhoffe ich mit dieser Arbeit, eine gewisse Klarheit über das Unbekannte zu schaffen und einige dieser Fragen zu klären.

0.2 Einführung in die Thematik

Brücken faszinieren die Menschheit seit jeher – sie verbinden nicht nur Orte, sondern stehen auch für meisterhafte Ingenieurskunst und physikalisches Verständnis. Diese Arbeit widmet sich einer besonderen Herausforderung: Dem Bau und der Analyse von Brücken aus Spaghetti. Durch die Kombination von Theorie und Praxis entsteht die besondere Möglichkeit, grundlegende Konzepte der Statik und Festigkeitslehre zu veranschaulichen.

Zunächst werden die zentralen Begriffe und Prinzipien beleuchtet, die für das Verständnis von Brücken und Tragwerken unerlässlich sind. Ergänzt wird dies durch Einblicke in altmodische Analyseverfahren wie das Cross-Verfahren und moderne wie die Finite-Elemente-Methode.

Den Kern dieser Arbeit bildet der experimentelle Bau und die Belastung verschiedener Spaghettibrücken – vom einfachen Einfeldträger bis hin zur komplexen Fachwerkbrücke. Diese Experimente ermöglichen die spannenden Vergleiche zwischen Theorie und Praxis und behandeln Fragen wie: Welche Brückenart ist am stabilsten? Wie gross sind die Abweichungen der Bruchstellen von der Theorie zur Praxis?

Am Ende wird sich herausstellen, ob die theoretischen Modelle die experimentellen Versuche erklären können.

0.3 Leitfrage

Im Fokus dieser Arbeit stehen dabei die folgende Leitfrage im Zentrum:

1. In welchem Mass stimmen die theoretischen Berechnungen mit den experimentellen Ergebnissen überein und wie lassen sich Abweichungen zwischen Theorie und Praxis erklären? Wo stossen sie gegeben falls an ihre Grenzen?

1. Theorie von Brücken

1.1 Grundbegriffe zur Statik und Festigkeitslehre

Bevor wir mit der Durchführung der Versuche und den Berechnungen starten, müssen erst-mals die wichtigsten Begriffe rund um den Aufbau und die Statik von Brücken näher erläutert werden. Dies erleichtert später, die Überlegungen und Erklärungen besser nachzuvollziehen.

1.1.1 Äussere Kräfte: Belastungsarten [1]

Man kann Belastungen in drei verschiedenen Arten unterteilen: die Punktlast, die Linienlast und die Flächenlast. Lasten können Kräfte, Momente oder Massen sein.

Punktlast F

Die Punktlast F wirkt an einem Punkt auf beispielsweise einem Träger und man beschriftet sie mit einem Grossbuchstaben. Die Grösse wird gemessen in kN. Beispiele für eine Punktlast können sein: Die wirkenden Kräfte von Stützen, Pfeilern oder Menschen und Fahrzeuge auf einer Brücke, usw.

Linienlast s

Die Linienlast s wirkt an einer Linie/Strecke und man beschriftet sie mit einem Kleinbuchstaben. Die Grösse wird gemessen in kN/m, was bedeutet, dass ein Balken mit einer Länge von 1 m eine gleichmässige Kraft von 1kN erfährt. Beispiele für eine Linienlast können sein: Das Gewicht von Wänden, Balken oder mehreren Menschen und Fahrzeuge auf einer Brücke, usw.

Flächenlast \bar{s}

Die Flächenlast \bar{s} wirkt an einer Fläche und man beschriftet sie mit einem Kleinbuchstaben mit Überstrich. Die Grösse wird gemessen in kN/m². Beispiele für eine Flächenlast können sein: Schneelasten auf Dächer, Windlasten auf Wände, Verkehrslast einer Brücke, die sowohl über die Länge als auch über die Breite verteilt ist, usw.

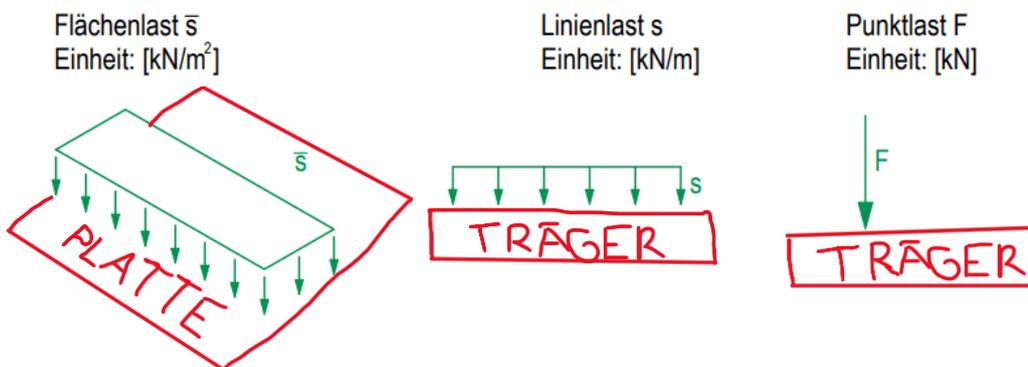


Abb. 1: Belastungsarten mit eigenen Ergänzungen.

Umrechnung verschiedener Lastarten

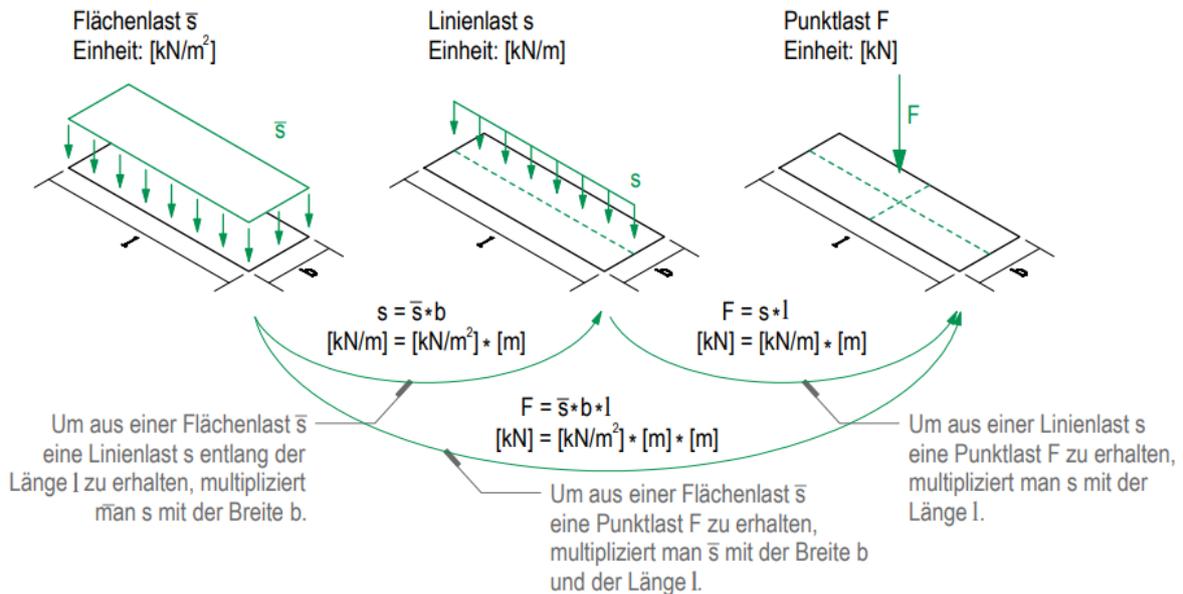


Abb. 2: Umrechnung verschiedener Lastarten.

1.1.2 Wichtige Größen in der Baustatik

Die Querkraft, das Biegemoment und das Trägheitsmoment sind wichtige Größen bzw. Kräfte bei der Statik von Brücken. Die Querkraft und das Biegemoment gehören neben der Normalkraft zu den Schnittgrößen, welche durch äussere Kräfte entstehen. Deshalb werden sie im folgenden Abschnitt genauer erklärt. [2]

Querkraft V

Querkraft bezeichnet die Kraft, die senkrecht zur Längsachse eines Bauteils wirkt. Sie trägt das Formelzeichen V und hat die Einheit Newton (N). Sie kann mittels einer Schnittreaktion aus der Gleichgewichtsbedingung berechnet werden, was später durchgeführt wird (siehe Kap. 1.3). Ihrer Berechnung kommt somit vor allem bei der Prüfung der Stabilität von tragenden Bauteilen, beispielsweise von Brücken oder Gebäuden, eine besondere Bedeutung zu. [3]

Biegemoment M [4,5]

Ein Biegemoment ist im Grunde eine Kraft, die bewirkt, dass sich ein Körper verbiegt. Dabei tritt es auf, wenn eine senkrecht zur Längsachse des Körpers wirkende Querkraft V in einem bestimmten Abstand von einem Bezugspunkt ausgeübt wird. (Auch entsteht es durch eine Streckenlast.) Deshalb lässt sich das Moment für eine Biegung M_b wie folgt definieren:

$$M_b = V \cdot x \quad [M_b] = \text{Nm}$$

V wirkende Querkraft
x Abstand der Kraft vom Bezugspunkt

Das Biegemoment ist ein Mass für die Intensität der Biegung.

In der folgenden Grafik ist die Vorzeichenkonvention für die Schnittgrößen angegeben:

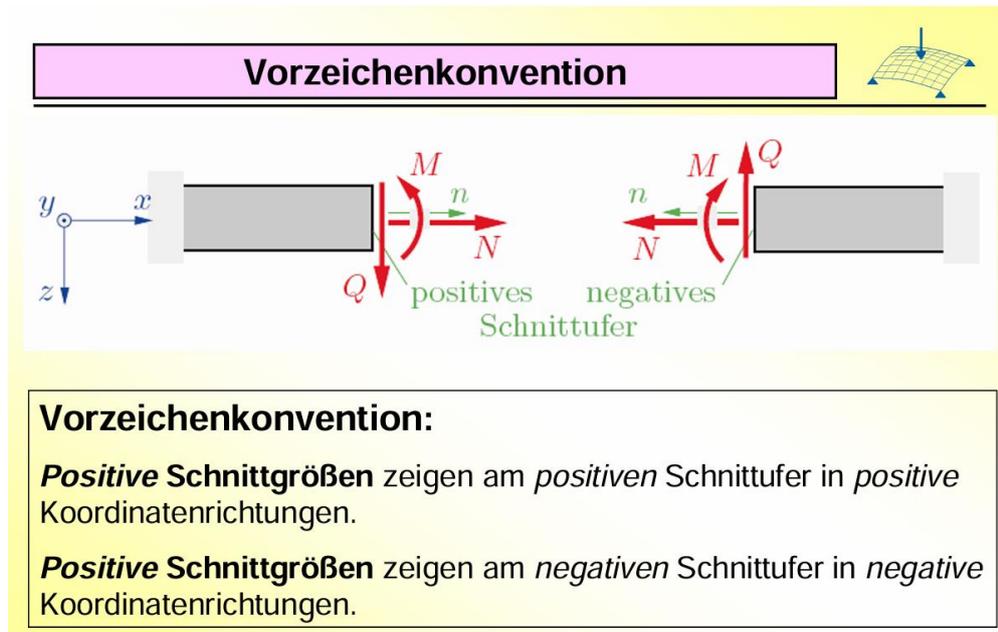


Abb. 3: Vorzeichenkonvention der Schnittgrößen

Flächenträgheitsmoment I [6]

In der Festigkeitslehre wird das Flächenträgheitsmoment auch als Flächenmoment 2. Grades bezeichnet und trägt das Formelzeichen I. Bei Flächenmomenten geht es generell um den Einfluss einer Querschnittsfläche auf die Eigenschaften von Bauteilen. Dieses beschreibt, wie groß der Widerstand eines Querschnittes gegen eine Verformung von außen (Verbiegung oder Torsion) ist. Die Einheit der Berechnung eines Flächenträgheitsmoments ist m^4 bzw. Längen in der vierten Dimension/Potenz (L^4).

So wird das Flächenträgheitsmoment I in der Festigkeitslehre für die Verformungsberechnung und Spannungsberechnung bei Biege- und Torsionsbeanspruchung verwendet. Außerdem wird mit den Momenten Belastungen, die zum Knicken von Stäben oder Beulen von Schalen führen, berechnet.

Das Flächenmoment 2. Grades kann man in drei verschiedene **Arten** unterteilen:

- axiales Flächenträgheitsmoment: beschreibt eine Querschnittsfläche bei einer Verbiegung und wird durch folgende Formel beschrieben:

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

Wobei z ist der vertikale Abstand zum Flächenelement dA bezüglich der y -Achse. Das axiale Flächenträgheitsmoment kann nur positive Werte annehmen.

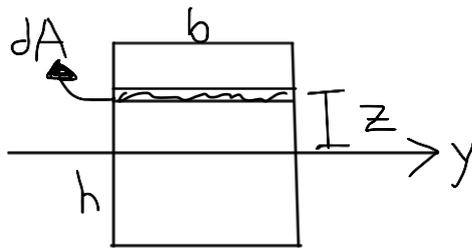
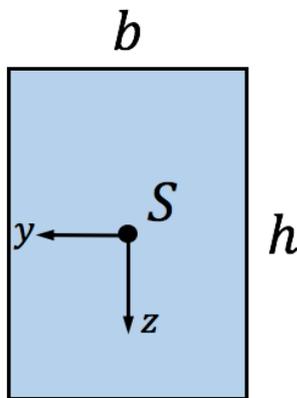


Abb. 4: Eigene Skizze:
Querschnitt eines Balkens

Bemerkung: In unserem Fall wird nur das axiale Flächenträgheitsmoment von Bedeutung sein, weshalb die Formeln der anderen Flächenträgheitsmomente weggelassen werden.

Wichtig ist, dass das Flächenträgheitsmoment in der Statik nicht mit dem Massenträgheitsmoment verwechselt wird, welches hauptsächlich in der Dynamik genutzt wird!



$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12}$$

Abb. 5: Flächenträgheitsmoment
anhand des Querschnitts eines
Balkens berechnen.

Diese Darstellung soll nochmals die Wirkung vom Flächenträgheitsmoment zeigen. Obwohl dies eine Form ist, spielt es eine grosse Rolle, auf welcher Seite die Belastung angebracht wird. Wirkt die Belastung auf die Seite b , so ist b die Breite und h die Höhe und man braucht die Formel für I_y . Wirkt die Belastung hingegen auf die Seite h , so wird b als Höhe definiert und h als Breite und man nutzt die Formel I_z bezüglich der Schwerachse z . Das bedeutet, dass das Flächenträgheitsmoment in Richtung der z -Achse grösser ist als in Richtung der y -Achse. Man stellt sich einen Masstab vor, den man erstmals auf der Kante belastet und es ein steifes Verhalten aufweist. Führt man das Gleiche auf die Fläche durch, so ist der Masstab viel biegsamer, da die Höhe sehr gering ist.

1.1.3 Mechanische Eigenschaften von Materialien bei Biegung

Die Spannung, Dehnung, das Elastizitätsmodul und das Hookesches Gesetz für Stäbe sind zentrale Größen für das Verständnis der mechanischen Eigenschaften und des Verhaltens von Materialien unter Belastung.

Spannung σ

Die mechanische Spannung ist der innere Widerstand eines Materials gegen Verformung, der entsteht, wenn äussere Kräfte darauf einwirken. Die Spannung hat folgende Formel bzw. Definition [7, 8]:

$$\text{Spannung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \quad \sigma = \frac{F}{A}$$
$$[\sigma] = 1 \text{ Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Die Spannung beschreibt die Kraft, die auf eine bestimmte Fläche wirkt [8].

Diese lässt sich zwischen der Biegespannung und der Schub- bzw. Scherspannung unterscheiden:

Die *Normalspannung* entsteht, wenn die Wirkrichtung der Kraft senkrecht zur Fläche ist (Normal). Hier kann noch die Unterscheidung zwischen der Druck- und Zugspannung gemacht werden. Von einer Zugspannung spricht man, wenn die Kraft von der Grenzfläche weggerichtet ist. Folglich hat sie ein **positives** Vorzeichen. Von einer Druckspannung spricht man, wenn die Kraft auf die Grenzfläche gerichtet ist. Folglich hat sie ein **negatives** Vorzeichen.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Die *Schubspannung bzw. Scherspannung* entsteht, wenn die Wirkrichtung der Kraft parallel zur Fläche ist (Querkraftbelastung). Bei der Schubspannung wird deswegen anstelle des Formelzeichens Sigma, der griechische Buchstabe tau verwendet:

$$\tau = \frac{F}{A}$$

Somit können die Spannungen anhand der Wirkrichtung der Kräfte einfach unterschieden werden [7,8].

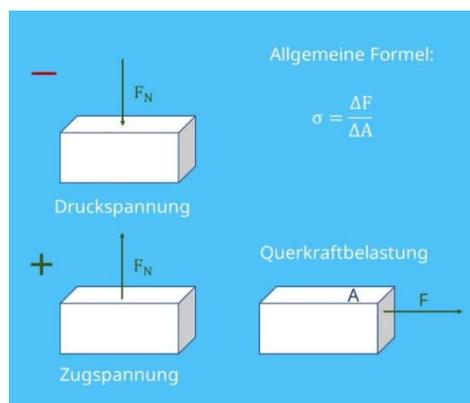


Abb. 6: Verschiedene Spannungsarten

Zusätzlich gibt es die *Biegespannung*, welche eine zentrale Rolle bei Balken/Stäben spielt und eine spezielle Form der Normalspannung ist. Sie tritt bei einer Biegebelastung eines Stabes/Balkens auf. Eine Biegebelastung ist eine Kombination aus Zug-/Druckkräften [9]. Ein Stab bzw. Balken erfüllt bestimmte Eigenschaften, welche im Kapitel 1.2 der Balkentheorie näher erläutert werden. Die Biegespannung variiert innerhalb des Querschnitts und ist maximal an den äußersten Fasern (siehe Abb. 7). Die Biegespannung ist proportional zum Biegemoment M und zum Abstand zur neutralen Achse y und umgekehrt proportional zum Flächenträgheitsmoment I . Die Formel der Biegespannung lautet [7]:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} \quad [\sigma] = \text{Pa}$$

M	Biegemoment
y	Abstand zur neutralen Achse
I	Flächenträgheitsmoment des Querschnitts [10]

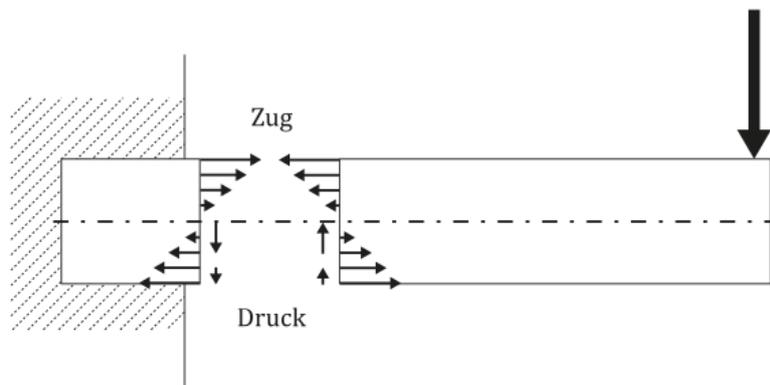


Abb. 7: Biegespannungsverlauf in einem Balken, ausgelöst durch ein Biegemoment am Ende des Balkens (dicker Pfeil). Gestrichelte Linie ist die neutrale Faser

→Die Herleitung der Biegespannung wird im Kapitel 1.2 Balkentheorie bzw. Bernoullitheorie behandelt.

Dehnung ϵ

Die Dehnung stellt eine Angabe der relativen Längenänderung eines Körpers unter Belastung (Verkürzung oder Verlängerung), etwa durch eine auf den Körper wirkende Kraft oder durch eine Temperaturänderung (Wärmeausdehnung). Vergrößern sich die Abmessungen des Körpers, wird dieses positive Dehnung oder Streckung genannt, im Umkehrfall wird von einer negativen Dehnung oder Stauchung gesprochen. Wir beschäftigen uns ausschliesslich mit der Dehnung, die durch Kräfte entsteht, da die Wärmeausdehnung bei kleinen Temperaturveränderungen vernachlässigt werden kann [11].

Die Dehnung ist eine direkte Folge der Normalspannung, welche durch Normalkräfte entsteht, und wird durch diese induziert. Die Formel der Dehnung lässt sich leicht durch die Geometrie herleiten [12]:

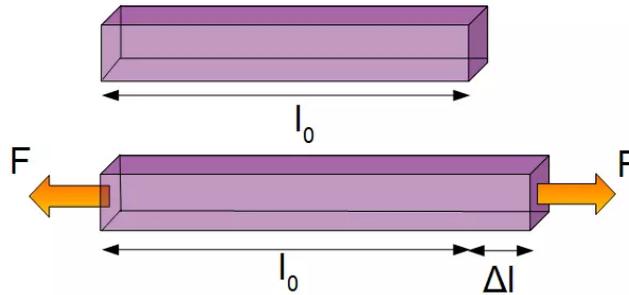


Abb. 8: Dehnung am Zugstab

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0}$$

L_0 Ursprungslänge

L gedehnte Länge

ΔL Längenänderung

Die Einheit ist dimensionslos und wird oft in Prozent oder Promille angegeben.

Unter der Wirkung der Normalkraft wird ein Bauteil gedehnt, d.h. verlängert oder verkürzt, je nachdem ob es sich um eine Zug- oder Druckkraft handelt. Zugkräfte bzw. Zugspannungen bewirken eine Dehnung oder Streckung aber auch eine Querdehnung des Stabes (\rightarrow der Stab wird dünner). Druckkräfte bzw. Druckspannungen bewirken neben der Stauchung eine Querstauchung des Stabes (\rightarrow der Stab wird dicker). Die Querdehnung bewirkt eine relative Dickenänderung und die Formel ist dabei dieselbe wie für die relative Längenänderung. Das Verhältnis aus Quer- und Längsdehnung wird dabei Poissonzahl genannt [11, 13].

Elastizitätsmodul und Hookesches Gesetz für Stäbe

Das Elastizitätsmodul, abgekürzt E-Modul, beschreibt das Verhältnis zwischen der Spannung und Dehnung bei einer Verformung. Mit Hilfe eines einfachen Experiments können wir verstehen, wie man das Elastizitätsmodul berechnen kann. Bei diesem Experiment handelt es sich um einen Zugversuch. Dazu betrachtet man das erhaltene Ergebnis des Versuches als Spannung-Dehnungsdiagramm eines bestimmten Materials: [14]

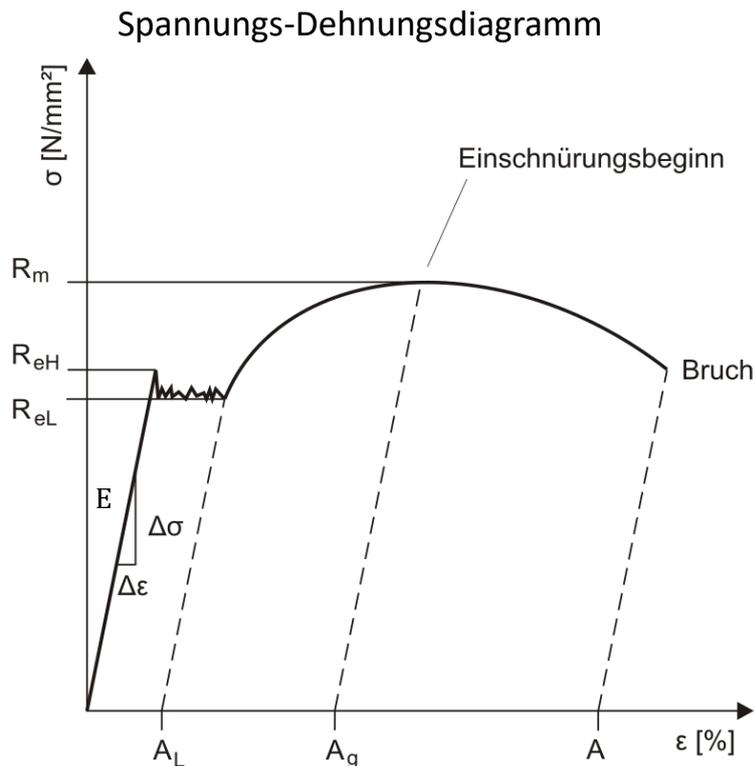


Abb. 9: Spannungs-Dehnungsdiagramm. Der erste Teil des Graphen bildet den linear-elastischen Bereich, gefolgt von einem kleinen Fließbereich, und schliesslich ist der letzte Teil der plastische Bereich, wo das Material nicht wieder von allein seine ursprüngliche Form annimmt.

Man erkennt, dass die Spannung und Dehnung im ersten Bereich proportional zueinander sind. In diesem Bereich verhält sich das Material elastisch und man spricht von einer elastischen Verformung, d.h. das Bauteil kehrt, sobald keine Kraft mehr auf ihn wirkt, in seine ursprüngliche Form zurück. Somit ergibt sich das Elastizitätsmodul als Steigung des linear-elastischen Bereichs des Spannungs-Dehnungsdiagramms. Dieses physikalische Verhalten nennt man auch das Hookesche Gesetz. Somit besagt das Hookesche Gesetz, dass die elastische Verformung eines Festkörpers sich linear zu der einwirkenden Belastung/Kraft verhält. Je größer die Belastung/Kraft, desto größer ist die elastische Verformung. [14, 15, 16]

Hookesche Gesetz ($\sigma \sim \epsilon$)

Elastizitätsmodul als Steigung: $E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon}$

Elastizitätsmodul als Definition: $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$

Das Elastizitätsmodul ist eine Materialkonstante mit der Einheit $\frac{N}{m^2} = Pa$ (oftmals in $\frac{N}{mm^2}$)

Das heisst, sie hängt vom Material ab!

1.1.4 Durchbiegung (Deflection)

Die Durchbiegung (oder Deflection) ist die vertikale Verformung eines Balkens oder einer Struktur unter einer Last. Sie beschreibt, wie stark sich der Balken von seiner ursprünglichen geraden Form wegbewegt, wenn Kräfte auf ihn wirken (siehe Abb. 10). Die Durchbiegung kann dabei als Winkel oder als Entfernung angegeben werden (siehe Abb. 11). Bei einer Längsverformung handelt es sich um eine Dehnung (siehe Kap. 1.1.3 *Dehnung*) [17,18,19].

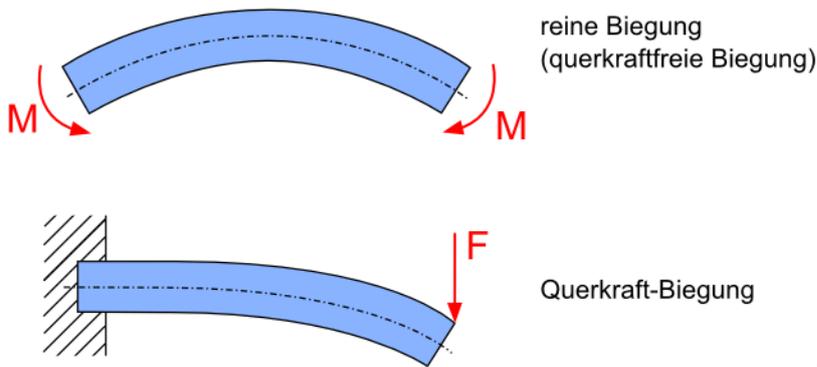
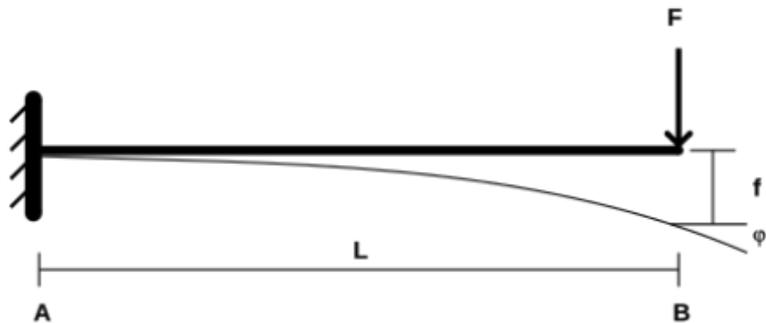


Abb. 10: Arten der Biegung

Abb. 11: Querkraft-Biegung mit Angabe des Winkels und der Entfernung



Die Durchbiegung hängt von verschiedenen Einflussfaktoren ab, darunter das Material des Balkens (z.B. Elastizitätsmodul), die Länge/Querschnitt und die Art und Grösse der aufgetragenen Lasten [19].

In der Physik bzw. im Ingenieurwesen spielt die Kontrolle der Durchbiegung eine wichtige Rolle, um sicherzustellen, dass Bauwerke stabil und funktional bleiben. Ein Beispiel hierfür ist das Bauingenieurwesen, wo die Kontrolle der Durchbiegung wichtig ist bei der Konstruktion und Überprüfung von Tragwerken, wie Brücken, Gebäuden und anderen Infrastrukturbauten. In diesem Zusammenhang ist oftmals die Rede von der maximalen Durchbiegung, welche eine Struktur aushalten kann, bevor sie versagt oder es zu einer Beeinträchtigung der Funktion kommt [19].

1.2 Balkentheorie bzw. Bernoullitheorie

Die Balkentheorie beschreibt das mechanische Verhalten von Balken bei Belastung, vor allem bei der Durchbiegung (siehe vorheriger Abschnitt), und wird deshalb auch Biegetheorie des Balkens genannt. Die Balkentheorie wird von Ingenieuren angewendet, um Verformungen von Balken vorherzusagen und Spannungen in Strukturen zu berechnen und zu modellieren. [20]

1.2.1 Bernoullische Annahmen

Jakob I Bernoulli hat Annahmen getroffen, die heute als Bernoulli-Hypothese oder auch als Normalenhypothese von Bernoulli bezeichnet werden, welche die physikalische Balkentheorie vereinfachen. Diese **Annahmen** beinhalten:

1. Die Länge des Balkens ist viel grösser als sein Querschnitt
2. Die Biegeverformungen, die auftreten, sind sehr gering im Verhältnis zur Länge des Balkens
3. Die Querschnitte bleiben auch nach der Verbiegung in sich eben
4. Die Balkenquerschnitte stehen nach der Deformation senkrecht auf der verbogenen Balkenachse bzw. neutralen Faser genauso wie vor der Verbiegung (siehe Abb. 12).
5. Der Balken wird als homogen und isotrop betrachtet, d.h. die Materialeigenschaften weisen nach allen Richtungen hin das gleiche physikalische Verhalten auf. Demnach folgt der Balken dem Hooke'schen Gesetz (siehe Kap. 1.13, *Hookesche Gesetz*).
6. Die Balkenachse bzw. neutrale Faser zeichnet sich dadurch aus, dass ihre Länge auch nach der Verbiegung unverändert bleibt. [20,21,22,23]

Man stellt sich nun vor, dass ein Balken verbogen wird (siehe Abb. 13). Die obere Seite wird gestaucht und entsprechend die Unterseite gedehnt. Die Schwerachse bzw. neutrale Faser ändert dabei die Länge nicht. Umgekehrt zur neutralen Faser ist die Randfaser am äussersten Rand des Querschnitts und erfährt die stärkste Dehnung bzw. Stauchung. Dort ist die Spannung auch am grössten (siehe Kap. 1.1.3, *Spannung*). Dies wird durch die Normalenhypothese von Bernoulli gefolgert.

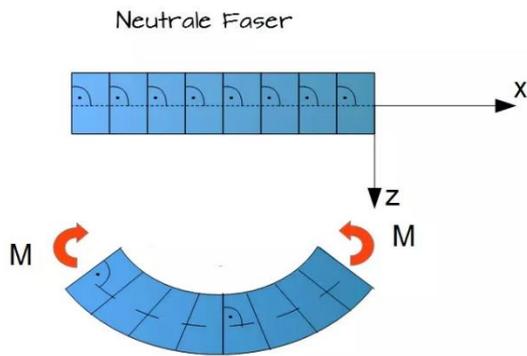


Abb. 12: Normalenhypothese von Bernoulli

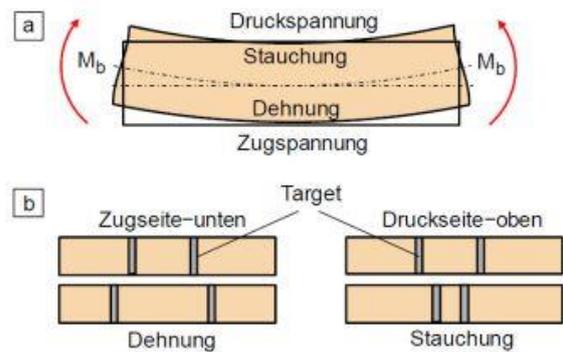


Abb. 13: Spannung und Dehnung im Biegeversuch

Mit Hilfe der Balkentheorie und den Annahmen können wir eine einfache Herleitung für die Biegespannung finden. Dies wird im nächsten Abschnitt durchgeführt.

1.2.2 Herleitung der Biegespannung [24]

(Paraphrasiert mit leichten Abänderungen und eigenen Ergänzungen sowie von hier [25])

Krümmung

Erstmals betrachten wir die Verformung nach der Biegung als Grafik mit zwei Nachbarquerschnitten, die sehr nahe beieinander sind und deshalb alle Größen minimal sind:

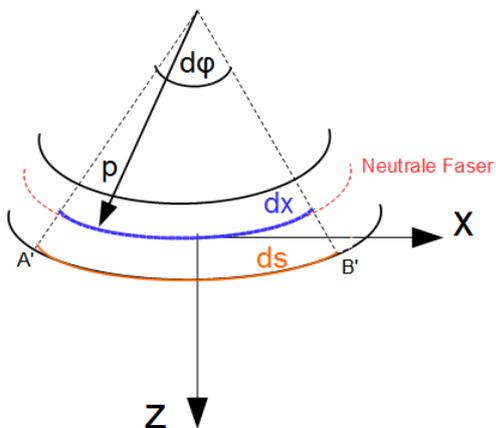


Abb. 14: Kreisbogenlänge bei reiner Biegung (mit eigener Ergänzung)

Mit der Abbildung 14 können wir die Kreisbogenlänge der unteren Randfaser ds bestimmen, indem wir es als Dreieck annähern:

$$ds = (\rho + z) \cdot d\varphi \quad (1)$$

Dabei ist ρ der Krümmungsradius bis zur neutralen Faser und z die Koordinate von der neutralen Faser zur unteren Randfaser. $d\varphi$ ist der Neigungswinkel zwischen zwei im Abstand benachbarten Querschnitten und steht für unendlich viele kleine Winkel.

Den folgenden Zusammenhang erhalten wir mit Hilfe der Formel für die Krümmung, die wie folgt lautet:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx} = \varphi' \quad (2)$$

Die Krümmung hat das Formelzeichen κ und es stellt den Umkehrwert des Krümmungsradius dar. In dem Fall ist die Formel unter der Bedingung für $z = 0$ aufgeschrieben.

Führt man die Bedingung $z = 0$ für die Formel (1) ein, d.h. die Randfaser entspricht der Länge der neutralen Faser, so kann die Beziehung gekürzt werden zu:

$$dx = \rho \cdot d\varphi \quad (3)$$

Lineare Dehnungsverteilung

Als nächstes bestimmt man das Ausmass der Dehnung der Faser. Nach der Definition der Dehnung (siehe Kap. Dehnung) beschreibt sie das Verhältnis der Längenänderung zu Ausgangslänge. Somit wählt man zwei Punkte vor und nach der Verformung und bestimmt mit dem Abstand dieser zwei Punkte die Dehnung. Wichtig zu beachten ist, dass die beiden Punkte auf der gleichen Höhe der z – Koordinate liegen. Hierzu wählen wir die beiden Punkte A' und B' nach der Verformung und A und B vor der Verformung, welche auf der neutralen Faser liegen und erhalten:

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{(\rho + z) \cdot d\varphi - \rho \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} \quad (4)$$

Nachdem man die Gleichung (4) kürzt erhält man, die in der z -Achse lineare Dehnungsverteilung:

$$\text{Lineare Dehnungsverteilung:} \quad \varepsilon_x = \frac{z}{\rho} \quad (5)$$

Nun kann man hier die Formel (2) für die Krümmung einsetzen:

$$\varepsilon_x = \varphi' \cdot z \quad (6)$$

Lineare Spannungsverteilung

Schliesslich macht man sich ein Gebrauch vom Hookeschen Gesetz (siehe Kap. Hookesche Gesetz):

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \quad (7)$$

Man kann nun die Formel (5) für die lineare Dehnungsverteilung in das Hookesche Gesetz (7) einsetzen und erhält die *lineare Spannungsverteilung*:

$$\text{Lineare Spannungsverteilung:} \quad \sigma_x = E \cdot \frac{z}{\rho} \quad (8)$$

E ist das E-Modul als Tabellenwert (siehe Kap. 1.1.3, *Elastizitätsmodul*)

Mit einer genaueren Betrachtung der Formel für die lineare Spannungsverteilung erkennt man, dass die Spannung für grosse Werte für z , also bis hin zur Randfaser, steigt und für kleine Werte für z , also bis hin zur neutralen Faser, sinkt. Genau im Grenzfall bei $z=0$ (neutrale Faser) beträgt die Spannung null. Nach Konvention (siehe Kap. 1.1.3, *Spannung*: Abschnitt *Normalspannung*) spricht man bei einer negativen Spannung (bei Werten für $z<0$) von der Druckspannung und bei einer positiven Spannung (bei Werten für $z>0$) von der Zugspannung. In der folgenden Grafik wird dies nochmals illustriert:

Zug-/Druckspannungen bei reiner Biegung

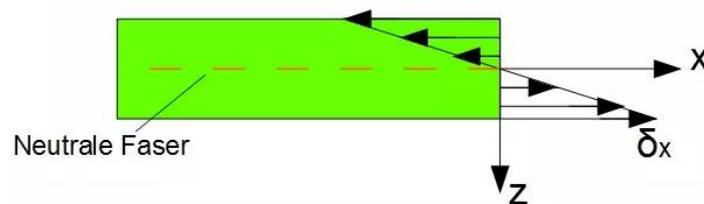


Abb. 15: Zug-/ Druckspannungen bei reiner Biegung

Biegemoment und Normalspannung bzw. Biegespannung

In unserem Fall betrachtet man die Normalspannung bei reiner Biegung. Die Besonderheit hier ist, dass die Normal- und Querkraft null betragen. Also bleibt noch das Biegemoment M_y , welches um die y -Achse dreht, bestehen. Dieses Biegemoment lässt sich durch folgende Formel berechnen:

$$M_y = \int_A z * \sigma_x dA \quad (9)$$

Durch Einsetzen der linearen Spannungsverteilung (8) formt sich die Formel um zu:

$$M_y = \int_A E * \frac{z^2}{\rho} dA \quad (10)$$

Man geht davon aus, dass der Balken aus einem Material besteht und deswegen kann das E-Modul als Konstante angesehen und mit Krümmungsradius ρ vor das Integral gezogen werden:

$$M_y = \frac{E}{\rho} \int_A z^2 dA \quad (11)$$

Nun kann man erkennen, dass uns das Integral bereits beim Flächenträgheitsmoment 2. Grades begegnet ist (siehe Kap. Flächenträgheitsmoment) und man kann diesen Ausdruck vereinfachen:

$$M_y = \frac{E}{\rho} \cdot I_y \quad (12)$$

Letztlich vereinfacht man die Formel für die lineare Spannungsverteilung (8) zu

$$\frac{E}{\rho} = \frac{\sigma_x}{z} \quad (13)$$

Und setzt diese in (12) ein:

$$M_y = \frac{\sigma_x}{z} \cdot I_y \quad (14)$$

Umgestellt nach der Normalspannung erhält man die Formel:

Normalspannung bei reiner Biegung:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

M_y Biegemoment;

I_y Flächenträgheitsmoment;

z Abstand zur neutralen Faser (als Koordinatenangabe)

Die Biegespannung ist nicht mehr abhängig vom Flächeninhalt A , sondern vom Flächenträgheitsmoment I_y 2. Ordnung.

Da diese Formel nur für die Berechnung der Normalspannung bei gerader reiner Biegung gilt, wird sie auch Biegespannung genannt (siehe Kap. 1.1.3, *Spannung*). Sie stellt einen Spezialfall der Normalspannung dar.

Mit Hilfe der Erkenntnisse der Balkentheorie und der Normalenhypothese von Bernoulli konnten wir die Biegespannung einfach herleiten.

1.3 Träger auf zwei Stützen bzw. Auflager

Der Träger auf zwei Stützen, auch Einfeldträger genannt, ist das einfachste statische Element und die unter Belastung entstehenden Auflagerkräfte können ohne viel Aufwand berechnet werden, da der Träger *statisch bestimmt* ist (dies wird später noch erklärt). [26]

1.3.1 Auflagerarten: Los- und Festlager

Bei einem Einfeldträger nutzt man zwei Stützen bzw. zwei Auflager. Doch was genau sind Auflager und welche Rolle erfüllen sie beim Einfeldträger?

Auflager bei Brücken werden als Orte definiert, an denen das Tragwerk (die Gesamtheit der tragenden Elemente) damit verbunden ist. Somit hat es die Funktion, dass das ebene Tragwerk sich als Ganzes nicht bewegen kann. Ausserdem erfüllt es die wichtige Funktion, bestimmte Bewegungsmöglichkeiten eines Tragwerks einzuschränken. Das Tragwerk hat drei Freiheitsgrade, was bedeutet, dass Verschiebungen in zwei Richtungen (vertikal und horizontal) durch Kräfte und Verdrehungen durch Momente möglich sind. Je nach Auflager können nun bestimmte dieser Bewegungsmöglichkeiten gesperrt werden. [26, 27, 28]

Festlager

Beim Festlager bleibt eine Drehbarkeit um den Auflagerpunkt bestehen. Jedoch werden Verschiebungen gesperrt bzw. ausgeschlossen. Das bedeutet, dass ein Festlager kein Moment mehr übertragen kann, aber weiterhin Kräfte. Deshalb bezeichnet man es auch als statisch zweiwertig, da es zwei Freiheitsgrade aufheben kann (siehe Abb. 16). Ein gutes Beispiel für ein Festlager ist eine Wippe. [27, 28]

Loslager

Beim Loslager bleibt auch eine Drehbarkeit um den Auflagerpunkt bestehen sowie eine Verschiebung in Richtung der Bewegungsbahn (horizontal). Jedoch wird hier die Verschiebung senkrecht zur Bewegungsbahn gesperrt bzw. ausgeschlossen. Deshalb bezeichnet man es auch als statisch einwertig, da nur ein Freiheitsgrad aufgehoben wird (siehe Abb. 16). Ein gutes Beispiel hierfür ist eine Wippe dessen Halterung auf Rollen steht. Somit ist ein Loslager ein bewegliches Festlager. [27, 28]

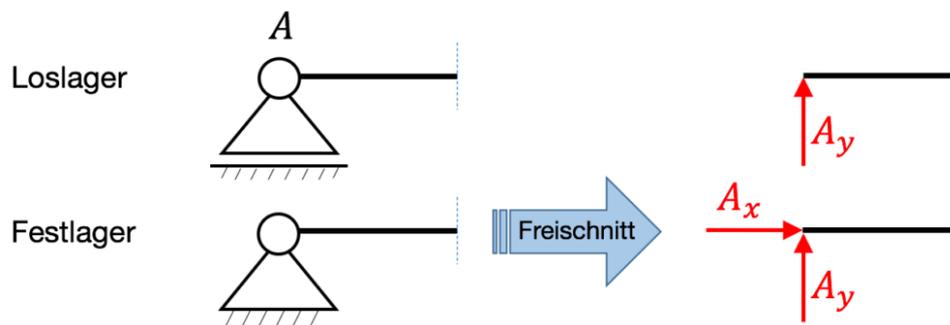


Abb. 16: Auflagerarten: Loslager und Festlager

Loslager-Festlager

Bei der Kombination von einem Los- und Festlager spricht man vom Einfeldträger. Wie wir bereits wissen, ermöglicht das Festlager keine Verschiebungen und das Loslager nur Verschiebungen horizontal zur Bewegungsbahn. Da ein Festlager zweiwertig und ein Loslager einwertig bestimmt ist, kann man es rechnerisch ermitteln. Dies weil man durch die Lagerreaktionen (aus den Gleichgewichtsbedingungen) drei Gleichungen erhält für drei unbekannte Größen (Lagerkräfte). Deswegen spricht man von statischer Bestimmtheit. [27]

Gleichgewichtsbedingungen: [26]

Wie bereits im vorherigen Abschnitt erwähnt, hat ein Tragwerk insgesamt drei Freiheitsgrade und man kann deshalb drei Gleichgewichtsbedingungen voraussetzen: (Die folgenden Werte beziehen sich auf die Abbildung 17 auf der nächsten Seite.)

- Summe aller Vertikalkräfte: $\sum F_v = 0 = F_{1,z} + F_{2,z} + A_v + B_v$
- Summe aller Horizontalkräfte: $\sum F_h = 0 = F_{1,x} + F_{2,x} + A_h$
- Summe aller Momente: $\sum M_A = 0 = F_{1,z} * x_1 + F_{2,z} * x_2 + B_v * L$

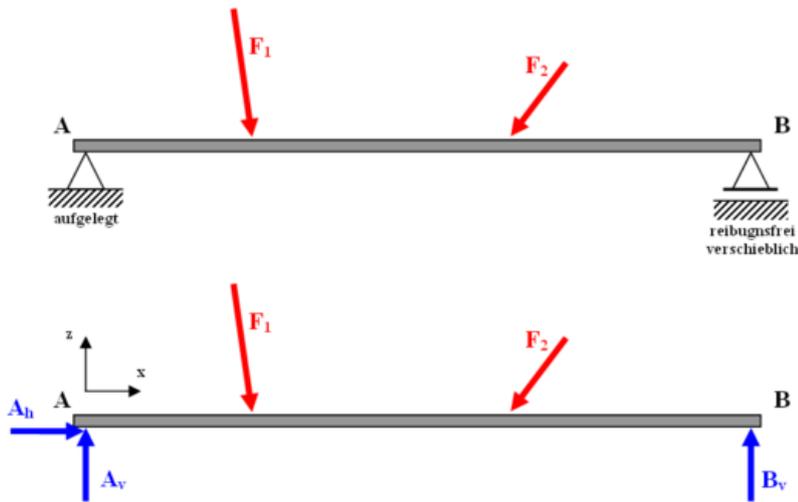


Abb. 17: Beispiel für Einfeldträger mit Auflagerreaktionen

Wobei F_1 und F_2 die äusseren Kräfte sind bezüglich der x- und z-Achse. $A_{v,h}$ und $B_{v,h}$ sind die Auflagerkräfte an den Stützen/Auflagern A (Festlager) und B (Loslager) bezüglich horizontaler und vertikaler Richtung. Wobei $B_h = 0$ (horizontale Lagerreaktion = 0) ist wegen der Definition des Loslagers. M_A und M_B sind die äusseren Momente bezüglich den Auflagern A und B.

Mittels den Gleichgewichtsbedingungen kann man später die Lagerreaktionen daraus herleiten. Dabei sind die Auflagerkräfte A_h , A_v und B_v Unbekannte.

1.3.2 Berechnung der Schnittgrössen (Querkraft und Biegemoment) [25]

Nachdem die wichtigsten Begriffe geklärt wurden, lassen sich nun die Schnittgrössen (Querkraft, Biegemoment) bei einer gegebenen Streckenlast aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnen.

Erstmals betrachten wir die folgenden Grafiken:

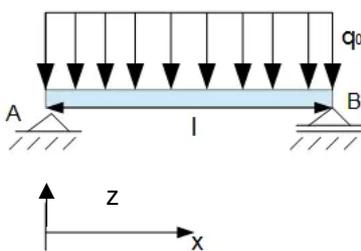


Abb. 18: Verteilte Last

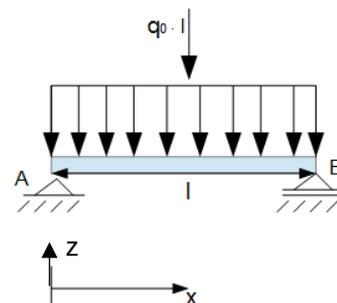


Abb. 19: Punktlast

Hierbei erkennen wir ein Tragwerk bzw. einen Balken mit zwei Stützen (links das Festlager A und rechts das Loslager B). Auf dem Balken mit der Länge l wirkt eine Streckenlast q_0 . Wir können die Streckenlast als eine Punktlast im Schwerpunkt des Balkens ansehen. Die einfache Umformung lautet dabei $q_0 \cdot l$. Es liegt genau in der Mitte des Balkens bei $l/2$. Wichtig ist noch die Definition der positiven Richtung. Horizontale Kräfte von links nach rechts sind positiv sowie vertikale Kräfte von unten nach oben und rechtsdrehende Momente (also im Uhrzeigersinn).

Lagerreaktionen:

Im nächsten Schritt bestimmen wir die Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbedingungen. Zuerst stellen wir die erste Lagerreaktion aus der Momentgleichgewichtsbedingung im Bezugspunkt des Lagers A auf:

$$\sum M_A = B_v * l - (q_0 * l) * \frac{l}{2} = 0$$

Wobei $(q_0 * l) * \frac{l}{2}$ die Punktlast im Schwerpunkt des Balkens ist mit dem Hebelarm zum Bezugspunkt A, also ein Moment. Aufgelöst nach B_v erhält man:

$$B_v = q_0 * \frac{l}{2}$$

Somit haben wir die erste Gleichgewichtsbedingung nach einer unbekanntem Lagerkraft aufgelöst.

Für die Bestimmung der nächsten Lagerreaktion nutzen wir die vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$$\sum F_y = A_v + B_v - q_0 * l = 0$$

Nach Einsetzen von B_v erhält man:

$$A_v + q_0 * \frac{l}{2} - q_0 * l = 0$$

Aufgelöst nach A_v erhält man:

$$A_v = q_0 * \frac{l}{2}$$

Somit konnten wir aus der vertikalen Gleichgewichtsbedingung nach dieser unbekanntem Lagerkraft auflösen und erkennen, dass wir dieselbe Formel erhalten haben.

Die horizontale Lagerkraft A_h beträgt 0, da es keine von aussen wirkende Horizontalkräfte auf das Tragwerk gibt.

Wir konnten die Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbedingungen schnell und einfach herleiten und widmen uns jetzt den Berechnungen des maximalen Biegemoments und der maximalen Querkraft an.

Bestimmung der Querkraft:

Da die Querkraft senkrecht auf das Tragwerk wirkt, können wir diese aus der vertikalen Gleichgewichtsbedingung berechnen. Hierzu führt man einen Schnitt an einer beliebigen Stelle x am Tragwerk durch und betrachtet den linken Balkenteil, wo wir auch die Querkraft berechnen werden (siehe folgende Grafik). Es ist von Vorteil, wenn der Schnitt genau durch die Mitte des Balkens verläuft, da wir die Länge x durch $l/2$ ersetzen können:

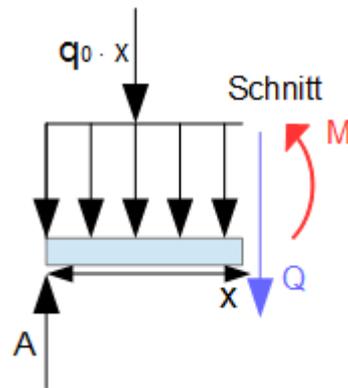


Abb. 20: Schnitt

In der Grafik erkennt man die Querkraft Q , das Moment M und die verteilte Streckenlast, welche nur auf die Hälfte des Tragwerks wirkt, als Punktlast wieder im Schwerpunkt des Balkenteils. x ist in unserem Fall genau $l/2$ und deswegen liegt der Schwerpunkt bei genau $x/2$ bzw. $l/4$.

Berechnung der maximalen Querkraft mit vertikaler Gleichgewichtsbedingung:

$$\sum F_y = A_v - Q - q_0 \cdot x = 0$$

Umgeformt nach Q ergibt:

$$Q = -q_0 \cdot x + A_v$$

Einsetzen der Gleichung nach A_v liefert:

$$\text{Querkraft-Allgemeine Formel: } V = -q_0 \cdot x + q_0 \cdot \frac{l}{2}$$

In unserem Fall ist der Schnitt genau bei der Hälfte. Somit ist $x = l/2$

$$\text{Querkraft: } V = -q_0 \cdot \frac{l}{2} + q_0 \cdot \frac{l}{2} = 0!$$

In diesem Spezialfall erhalten wir für den Betrag der Querkraft 0, was bedeutet, dass keine Querkraft in der Mitte des Balkens wirkt. Hier ist die Querkraft betragsmäßig **minimal**.

Ein weiterer Spezialfall ist, wenn $x = 0$ oder $x = l$ ist, also die Querkraft auf den Auflagern. Man erhält mit der Formel als Betrag die Lösung $q_0 \cdot \frac{l}{2}$, was genau der vertikalen Auflagerkraft A_v bzw. B_v entspricht. Hier ist die Querkraft betragsmäßig **maximal**.

Für den Verlauf der Querkraft an einem Träger mit zwei Stützen gibt es eine typische Darstellung, welche die Formel als Funktion/Graphen darstellt und wie folgt aussieht:

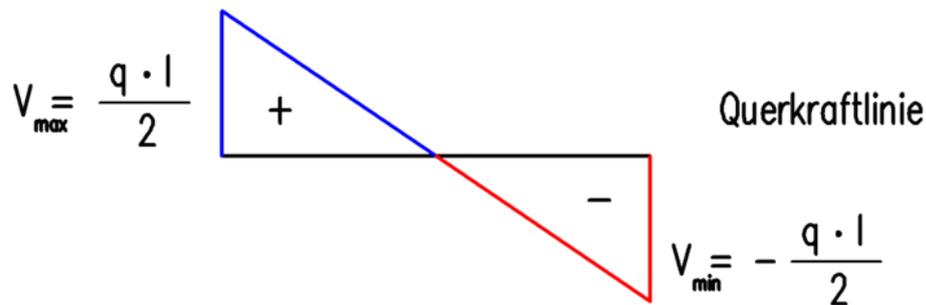


Abb. 21: Querkraftverlauf

Bestimmung des Biegemoments:

Das Biegemoment lässt sich mit Hilfe der Momentengleichgewichtsbedingung berechnen. Der Bezugspunkt des Biegemoments liegt hier in der Schnittfläche:

$$\sum M = M - A_v \cdot x + (q_0 \cdot x) \cdot \frac{x}{2} = 0$$

Aufgelöst nach M, erhält man:

$$M = -(q_0 \cdot x) \cdot \frac{x}{2} + A_v \cdot x$$

Einsetzen der Gleichung nach A_v liefert:

$$\text{Biegemoment-Allgemeine Formel: } M = -\frac{1}{2} q_0 \cdot x^2 + q_0 \cdot \frac{l}{2} \cdot x$$

In unserem Fall ist der Schnitt genau bei der Hälfte. Somit ist $x = l/2$

$$\text{Biegemoment: } M = -\frac{1}{2} q_0 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 + q_0 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{1}{8} q_0 \cdot l^2 + \frac{1}{4} q_0 \cdot l^2 = \frac{1}{8} q_0 \cdot l^2$$

In diesem Spezialfall erhalten wir für das Biegemoment folgende Lösung: $M = \frac{q_0 \cdot l^2}{8}$. Hier ist das Biegemoment **maximal**.

Setzt man $x = 0$ oder $x = l$ ein, so erhält man für das Biegemoment 0. Das bedeutet, dass das Biegemoment an den Auflagern **minimal** ist.

Auch für den Verlauf des Biegemoments an einem Träger mit zwei Stützen gibt es eine typische Darstellung, welche die Formel als Funktion/Graphen darstellt und wie folgt aussieht. Dabei ist die positive Richtung nach unten definiert worden:

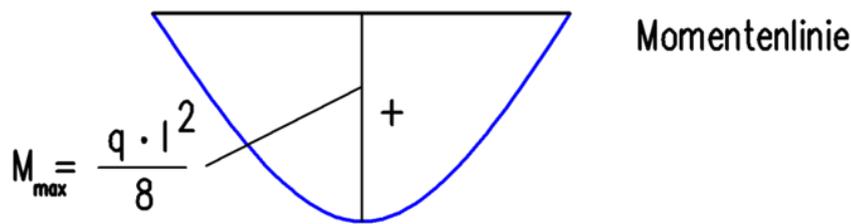


Abb. 22: Momentverlauf

Bestimmung der Scher- bzw. Biegespannung:

Mit den Formeln für die Querkraft und das Biegemoment lassen sich auch die Spannungen bestimmen. Fangen wir erstmals mit der Scher- bzw. Schubspannung an, welche durch die Querkraft induziert wird. Die Formel für die Schubspannung ist bereits bekannt und lautet:

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{V}{A}$$

Einsetzen der Formel für die Querkraft und vereinfachen, liefert:

$$\text{Scherspannung - Allgemeine Formel: } \tau = \frac{q_0 \cdot (l-2x)}{2A}$$

Die Werte sind dort maximal bzw. minimal, wo dies auch für die Querkraft der Fall ist.

Die Formel für die Biegespannung ist auch bereits bekannt und lautet:

$$\sigma_x = \frac{M_y \cdot z}{I_y}$$

Einsetzen der Formel für das Biegemoment und vereinfachen, liefert:

$$\text{Biegespannung - Allgemeine Formel: } \sigma_x = \frac{(-\frac{1}{2} q_0 \cdot x^2 + q_0 \cdot \frac{l}{2} \cdot x) \cdot z}{I_y}$$

Die Werte sind dort maximal bzw. minimal, wo dies auch für das Biegemoment der Fall ist.

1.4 Cross Verfahren und FEM

Im Fall einer Loslager – Festlager - Kombination konnten wir sehen, dass man das Biegemoment, die Querkraft und die Spannung mit einfachen Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmen kann. Dies war deswegen möglich, weil dieser Fall statisch bestimmt ist. Bei einem Tragwerk mit beispielsweise drei Auflagern befinden wir uns im statisch unbestimmten Fall und es lässt sich nur sehr aufwendig mittels einer Handrechnung ermitteln. Die Lösung hierfür liegt in der Methode Cross.

1.4.1 Einführung und wichtigste Begriffe [30, 31, 32, 33]

Das Cross - Verfahren ist ein iteratives Berechnungsverfahren, entwickelt von Hardy Cross und veröffentlicht im Jahr 1930. Mit Hilfe dieser Methode lassen sich die Biegemomente an den Enden des Balkens in statisch unbestimmten Fällen praktisch bestimmen. Die Brücke mit drei Stützen ist statisch unbestimmt, da die Anzahl der Lagerreaktionen (unbekannte Grössen) die Anzahl der möglichen Gleichgewichtsbedingungen (Gleichungen) übersteigt. Wie es der Name bereits sagt, wird das Ergebnis approximativ durch schrittweise Annäherung bestimmt und man erhält schliesslich ein recht exaktes Resultat. [30, 31]

Prinzip der Methode:

Bei der Methode Cross / dem Momentenausgleichsverfahren werden erstmals alle Knoten als feste Einspannungen (sog. fix-ends) angesehen. Man stelle sich ein Stab vor, welches an beiden Enden eingespannt ist. Anschliessend werden die Knoten in der Folge einzeln gelöst und das Momentgleichgewicht an jeweils einem Knoten wieder hergestellt. Dadurch verteilt sich das fix-end moment eines Knoten im benachbarten Knoten. Man berechnet bei jedem Schritt die Änderung der Momente an einem Knoten und addiert sie später zusammen. Mit dieser Methode kommt man durch schrittweise Annäherung (Iteration) schliesslich ans Resultat. [30, 31, 32]

Bevor die Methode durchgeführt wird, sollen die wichtigsten Begriffe wie feste Einspannungen (fix-ends) oder Knoten erklärt werden.

Feste Einspannung (fix-end):

Eine feste Einspannung ist eine weitere Auflagerart mit der Besonderheit, dass dem Tragwerk keine Bewegungsmöglichkeiten gestattet sind. Somit sperrt sie beide Verschiebungen und Drehungen und alle drei Freiheitsgrade werden aufgehoben (statisch dreiwertig) (siehe Abb. 23 unten am Knoten B). [32]

Biegemomente der festen Einspannung:

Das bedeutet, wenn eine feste Einspannung im Iterationsprozess gelöst wird (siehe Abb. 23 Auflager A), findet eine Drehung statt, also ein Biegemoment wird zugelassen (siehe Abb. 23). Dies wird «unbalanced moment» genannt. Somit beträgt die Summe aller Momente an diesem Knoten (dort, wo das Auflager das Tragwerk trifft) nicht mehr null. Dieses Moment wird

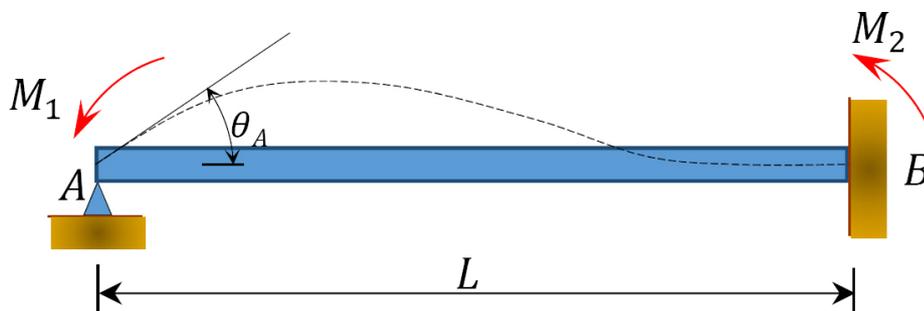


Abb. 23: Unbelasteter Träger

mit einem bestimmten Faktor auf die feste Einspannung B übertragen, welcher sich Übertragungsfaktor nennt. Zum Begriff Übertragungsfaktor (Carry-over factor) kommen wir gleich auch noch. [32]

Biegesteifigkeit:

Die Biegesteifigkeit gibt an wie stark der Widerstand im Querschnitt bei einer Biegung durch ein Moment ist. Mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes und den Überlegungen zur Krümmung (siehe Kap. Durchbiegung) lässt sich die Formel für die Biegesteifigkeit herleiten:

$$\text{Biegesteifigkeit: } K = \frac{E \cdot I}{L}$$

Wobei E das Elastizitätsmodul, I das Flächenträgheitsmoment und L die Länge ist. [33]

Carry-over factor (Übertragungsfaktor):

Mit der Erkenntnis, dass ein sog. «unbalanced moment» entsteht, wenn eine feste Einspannung gelöst wird, und dass unter dem Einfluss von Biegemomenten Verformungen/Krümmungen am Tragwerk/Stab sich bilden, können wir folgendes schliessen. Aufgrund der Auflagerdrehung erzeugt durch das «unbalanced moment» entsteht ein Einspannmoment im anderen Auflager B (siehe Abb. 23). Dieses «unbalanced moment» wird nun mit einem bestimmten Faktor auf das Auflager übertragen, welches sich Übertragungsfaktor (Carry-over factor) nennt. Dieser berechnet sich als Verhältnis der beiden Momente. [32]

Distribution factor (Verteilungsfaktor):

Der Verteilungsfaktor gibt an, wie stark ein «unbalanced moment» zwischen den Elementen eines Knotens verteilt wird. Dies wird als relative Biegesteifigkeit eines Elements zu den Biegesteifigkeiten aller anderen Elemente berechnet:

$$D_{oB} = \frac{K_{oA}}{K_{oA} + K_{oB}}$$

Wobei K die Biegesteifigkeit der jeweiligen Knotenpunkte ist und D_{oB} den Anteil angibt, der von A zu B verteilt wird. [32]

1. Situation: Alle Enden eingespannt

Ein Fixendmomentt ist positiv, wenn es den Knoten unter seiner Wirkung im Uhrzeigersinn dreht und negativ, wenn es diesen im Gegenuhrzeigersinn dreht.

Da nun alle wichtigen Begriffe erklärt wurden, sind hier unten die wichtigsten Formeln für die Situationen mit dem beidseitig und einseitig gespannten Stab angegeben. [32]

Für die Anfangsmomente erhalten wir:

$$M_{A,B} = -\frac{q \cdot l^2}{12}$$

Wobei q die Streckenlast, l die Länge des Tragwerks und M die Momente bei A und B sind.

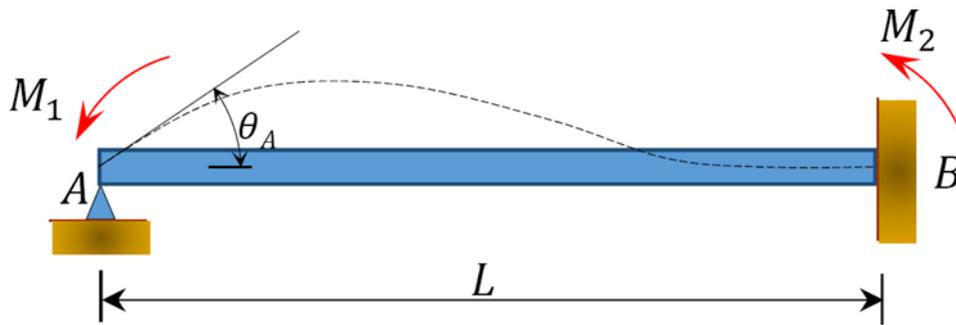


Abb. 23: Unbelasteter Träger

2. Situation: Feste Einspannung in A gelöst und feste Einspannung in B bleibt

Hier wird am Knoten A das Drehmoment M_A ausgeübt und der Knoten A rotiert. Dadurch entsteht im Knoten B das Drehmoment M_B (siehe Abb.23, oben).

Mit der Berechnung Einspannmomente erhalten wir:

$$M_A = \frac{4 \cdot E \cdot I}{l}$$

$$M_B = -\frac{2 \cdot E \cdot I}{l}$$

Wobei E das Elastizitätsmodul, I das Flächenträgheitsmoment und l die Länge sind.

Mit der Definition des Übertragungsfaktors erhalten wir:

$$\frac{M_B}{M_A} = 0.5$$

3. Situation: Alle festen Einspannungen sind gelöst (Festlager A und Loslager B) (siehe Abb. 24 auf der nächsten Seite)

Für den Einspannmoment erhält man:

$$M = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l}$$

Wobei E das Elastizitätsmodul, I das Flächenträgheitsmoment und l die Länge ist. Wegen dem Festlager («pinn») entsteht im Knoten B kein Drehmoment, $M_B = 0$. Dies bedeutet, dass an A kein Moment auf B übertragen wird.

Der Übertragungsfaktor beträgt hier:

$$\frac{M_B}{M_A} = 0$$

Da durch das Loslager B kein Moment entsteht.

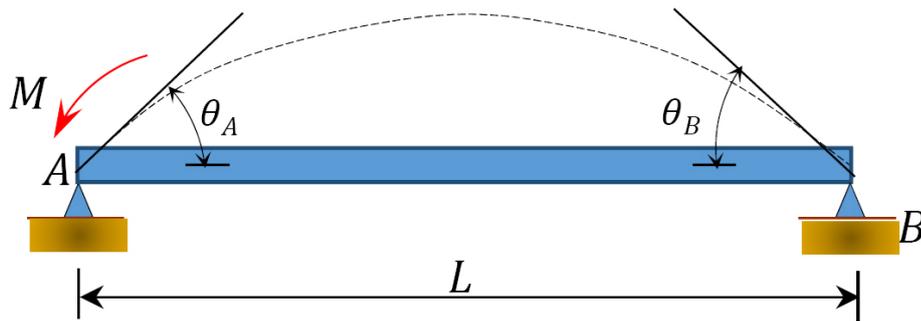


Abb. 24: Träger mit allen festen Einspannungen gelöst

Da wir nun alle wichtigen Angaben haben, können wir den Vorgang beim Crossverfahren betrachten. [32]

1.4.2 Vorgang beim Cross – Verfahren [31]

- 1) Blockieren aller Knoten. Man erhält somit lauter feste Einspannungen.
- 2) An diesem Balken lassen sich die Ausgangsmomente bzw. Einspannmomente berechnen.
- 3) Berechnung der Biege- bzw. Stabsteifigkeiten und der Verteilungsfaktoren (distributed factors).
- 4) Bestimmung der Übertragungsfaktoren (carry-over factors), welche im Grunde genommen 0.5 sind ausser am eingespannten Auflager.
- 5) Der Knoten wird zum Drehen freigesetzt und rotiert durch das erzeugte «unbalanced moment». Das «unbalanced moments» wird mittels Verteilungsfaktor 0.5 auf die benachbarten Knoten verteilt.
- 6) Dieser Prozess wird nun iteriert bis kaum noch welche Momente übertragen und verteilt werden - Anschliessend werden alle Drehmomente an einem bestimmten Knoten zusammennaddiert.

Dieses Verfahren wird später an einem echten Beispiel angewendet und die Rechenschritte nochmals Schritt für Schritt erläutert.

Schlussendlich darf man die Bedeutung des Cross-Verfahrens für die damalige Zeit nicht vergessen. Auch wenn es heute Computerprogramme gibt, welche mit viel besseren Methoden ausgestattet sind und beispielsweise die Biegespannungen in Windeseile berechnen können, war es für früher im Bauingenieurwesen undenkbar ohne dieses Verfahren, da Computer bei Weitem nicht so weit entwickelt waren wie heute. Eines dieser Methoden, welche man heutzutage nutzt, ist die FE-Methode, welche im folgenden Abschnitt genauer erläutert wird.

1.4.3 FE-Methode (FEM) [34]

Die FE-Methode (finite element method) ist ein numerisches Verfahren, welches man in den unterschiedlichsten Teilgebieten der Physik verwenden kann. Ein passendes Beispiel ist der Gebrauch in der Untersuchung von Festkörpern mit komplexer Form, welche mit den alten Methoden (z.B. Balkentheorie oder Cross-Verfahren) nur mühsam und mit viel Zeitaufwand zu berechnen sind im Vergleich zur FEM. Deshalb nutzt man heutzutage Online-Programme, welche mit dieser Methode arbeiten, um das Rechnen einerseits zu erleichtern, und andererseits zeitsparender, effizienter und noch präziser zu sein.

Die Funktionsweise der FE-Methode verläuft wie folgt: Man teilt erstmals die Form in viele kleine Stücke (z.B. Quader oder Tetraeder), welche man die «finiten Elemente» nennt. Anschliessend analysiert man das physikalische Verhalten dieser Elemente einzeln, was anhand der einfachen Geometrie mit bekannten mathematischen Gleichungen erfolgt. Im letzten Schritt werden die Resultate der einzelnen Elemente zusammengesetzt und man approximiert somit das physikalische Verhalten der ganzen Form.

Mit dieser Methode kann man selbst bei komplizierten Strukturen die Schnittgrössen einfach und schnell bestimmen.

2. Versuchsdurchführungen

In diesem Teil meiner Arbeit geht es um die durchgeführten Versuche, welche am Wissen des Theorieteils basieren und die wichtigsten physikalischen Prinzipien enthalten.

2.1 Bau von Spaghettibrücken

Im Rahmen dieser Maturaarbeit habe ich mich dazu entschieden, Brücken aus Spaghetti zu bauen, um den physikalischen Aspekt von Brücken näher zu veranschaulichen und zu analysieren.

2.1.1 Spaghettibrücke aus zwei Stützen (1)

Material und Methoden:

Die verwendeten Materialien kann man auf der Abbildung unten sehen:

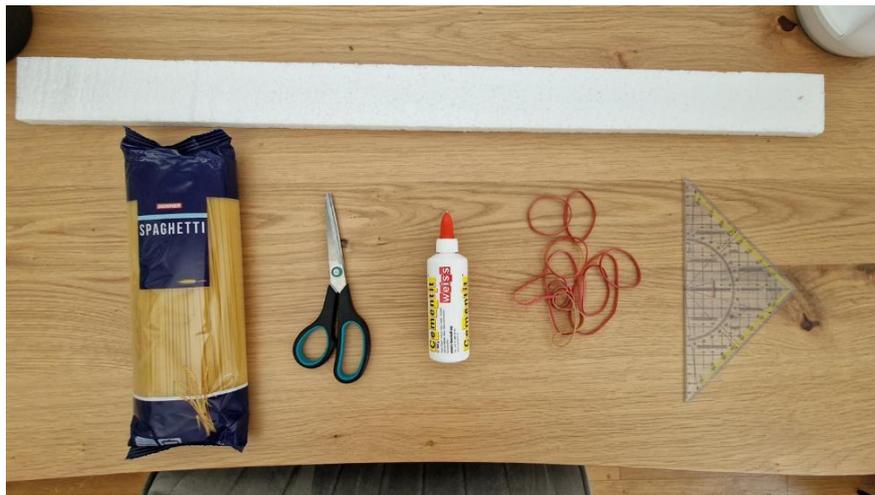


Abb. 25: Materialien für den Bau

Für den Bau braucht man Spaghetti, Weissleim, eine Schere, paar Gummibänder, ein Geodreieck für die Abmessungen und Styropor für die Stützen.

Erstmal habe ich zwei Bündel aus sechs identisch langen Spaghetti gebildet, diese mit einem Gummiband befestigt und zusätzlich an den Enden mit Weissleim zusammengeklebt. Geklebt habe ich sie, damit die Spaghetti an den Enden nah aneinander liegen und nicht ausfransen. Auf diesen zwei Bündeln sollte später die Brücke gebaut werden.

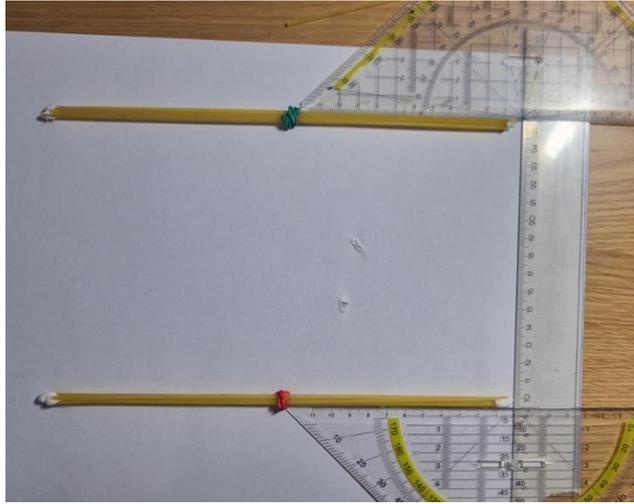


Abb. 26: Arbeitsprozess: Zwei Bündel in einem Abstand

Sobald der Leim ein bisschen getrocknet war, habe ich die Bündel in einem bestimmten Abstand sowie senkrecht zueinander gelegt. Anschliessend konnte ich die Spaghettibündel bis zum Gummiband mit Weissleim versehen und die Spaghetti einzeln drankleben. An der Mitte angekommen, habe ich noch eine zusätzliche Leimschicht über die Spaghetti getan.

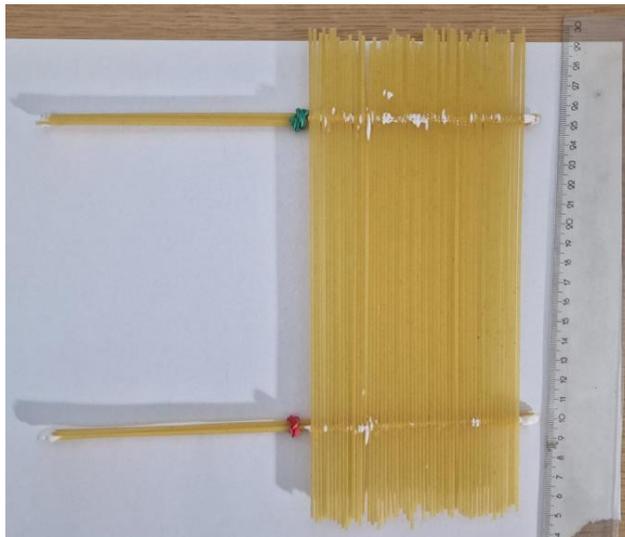


Abb. 27: Arbeitsprozess des Baus der Brücke

Nun konnte ich die Gummibänder mit einer Schere abschneiden, entfernen und das Gleiche mit dem Rest der Brücke machen.

Jetzt musste man all den Leim für mehrere Stunden trocknen lassen. Als dies getan war konnte ich die Brücke umdrehen und die Styroporstützen anleimen sowie zusätzlichen Leim an den Bündeln legen für zusätzliche Stabilität.



Abb. 28: Leimen des Trägers



Abb. 29: Leimen der Stützen

Man kann noch die Spaghetti aussen auf die gleiche Länge kürzen. →Somit ist der Bau der ersten Brücke beendet!

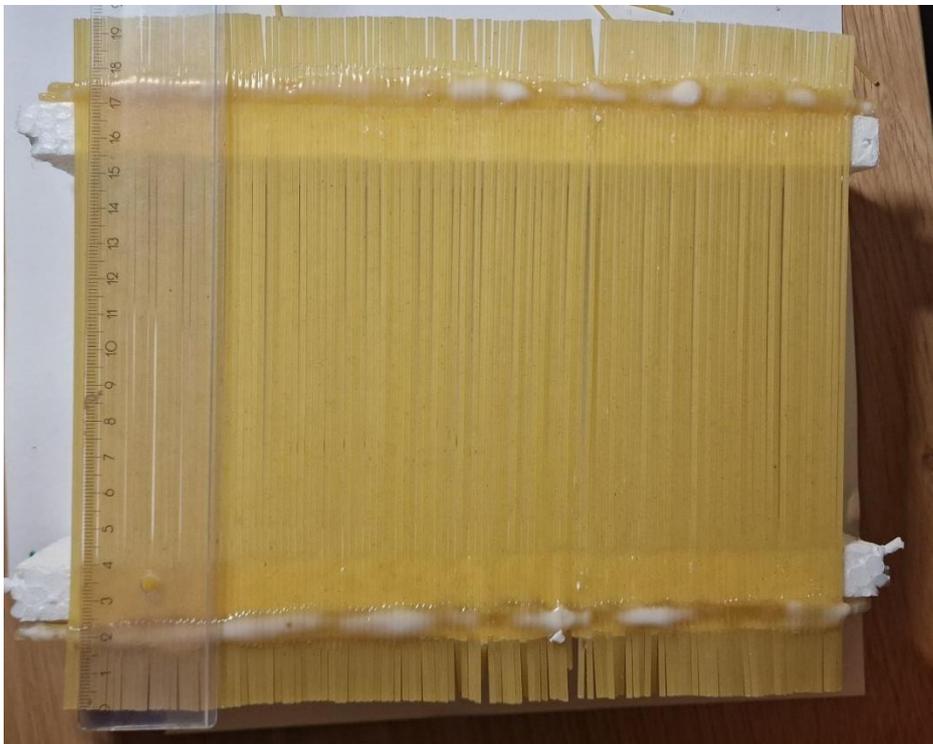


Abb. 30: Fertige Bau der Brücke (1)

Dimensionen und Masse der Brücke:

In der folgenden Tabelle sind die wichtigsten Angaben über die Brücke:

Durchmesser der Spaghetti	1.7 mm
Länge der Brücke (belastbarer Teil)	11.5 cm
Breite der Brücke	26 cm
Breite der Styroporstützen	1.5 cm
Masse des Trägers (Brücke ohne Stützen)	130 g

Schwierigkeiten beim Bau der Brücke:

Ein Problem war die verwendete Menge des Weissleims. Da ich eine enorme Menge Weissleim genutzt habe, haben die Spaghetti viel Feuchtigkeit aufgenommen und sind an manchen Stellen weich geworden. Auch hat dies zur Verformung der Brücke geführt (Stützen nicht ganz den Boden berührt). Da die Spaghetti nicht alle gleich lang waren musste ich sie noch zurechtschneiden. Einige Spaghetti waren auch verbogen, welche ich auf keinen Fall für den Bau der Brücke genutzt habe. Jedoch ist es des Öfteren passiert, dass ich diese aus Versehen an die Brücke geklebt habe und die Brücke nicht an allen Stellen komplett gerade war.

Belastung der Brücke:

Die Brücke sollte zwei Festlager haben und gleichmässig belastet werden (Flächenlast). Deshalb entschied ich mich sie mit Büchern zu belasten. Hierfür habe ich erstmals ein Buch gesucht, welche ungefähr dieselbe Länge und Breite wie meine Brücke besass, damit die Last möglichst auf die ganze Fläche wirken kann. Somit konnte ich nachher immer mehr Bücher auf dem Stapel legen und gleichzeitig die Verformung beobachten. Dies hat jedoch nicht funktioniert, da die Last nicht vom Träger ertragen wurde, sondern nur von den Stützen. Deswegen habe ich versucht die Brücke möglichst punktuell (auf eine kleine Fläche) zu belasten und diesmal kam es zum Bruch.

2.1.2 Capellinibrücke aus drei Stützen (2, 3)

Material und Methoden:

Aufgrund der Erkenntnisse der letzten Brücke, habe ich mich entschieden einige Änderungen vorzunehmen. Eine davon war, dass ich nach einem neuen Material gesucht habe und auf die Capellini gestossen bin. Im Grunde genommen sind Capellini auch Spaghetti, aber deutlich dünner. Auch sollte nun Sekundenkleber (Ultra Gel) verwendet werden für den Träger anstelle von Weissleim. Diesmal sollte es auch eine Brücke aus drei Stützen werden.

Erstmals habe ich wie beim letzten Brückenbau Bündel mit Weissleim aus je sechs identischen Capellini hergestellt. Da es eine Brücke mit drei Stützen wird, sind es insgesamt vier Bündel.

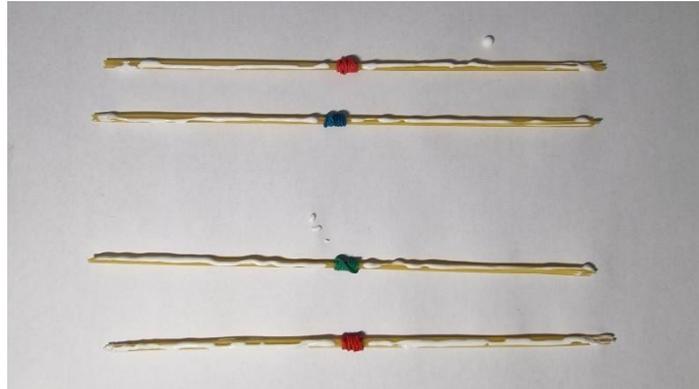


Abb. 31: Vier Bündel aus Capellini

Bevor ich die Capellini auf die Bündel klebe, habe ich diesmal erst mehrere Capellini aneinander geklebt zu kleinen «Brettern» und erst diese mit Sekundenkleber an den Bündeln befestigt. Dabei habe ich die Bündel so ausgerichtet, dass es zwischen dem mittleren Bündel ein Platz für die Styroporstütze hat. Mit dem beendet, habe ich die Brücke umgedreht und an den folgenden Stellen mit Heisskleber stabilisiert.

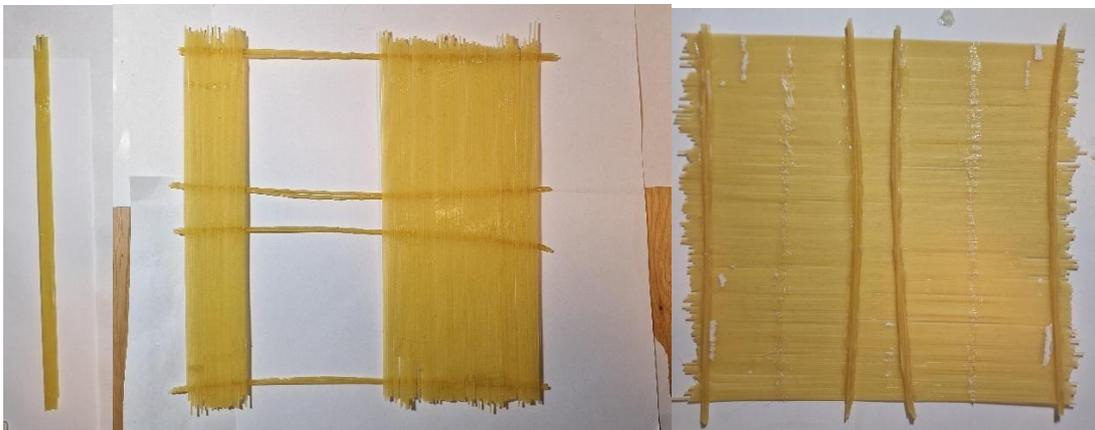


Abb. 32: Bauprozess der Capellinibrücke und Bekleben der Rückseite

Schliesslich konnte ich noch die Stützen befestigen. Da dies mit dem flüssigen Sekundenkleber nicht funktioniert hat (Styropor wurde aufgelöst), habe ich sie mit dem Heisskleber befestigt. →Somit war auch dieser Brückenbau fertig (siehe Abb. 33, nächste Seite).

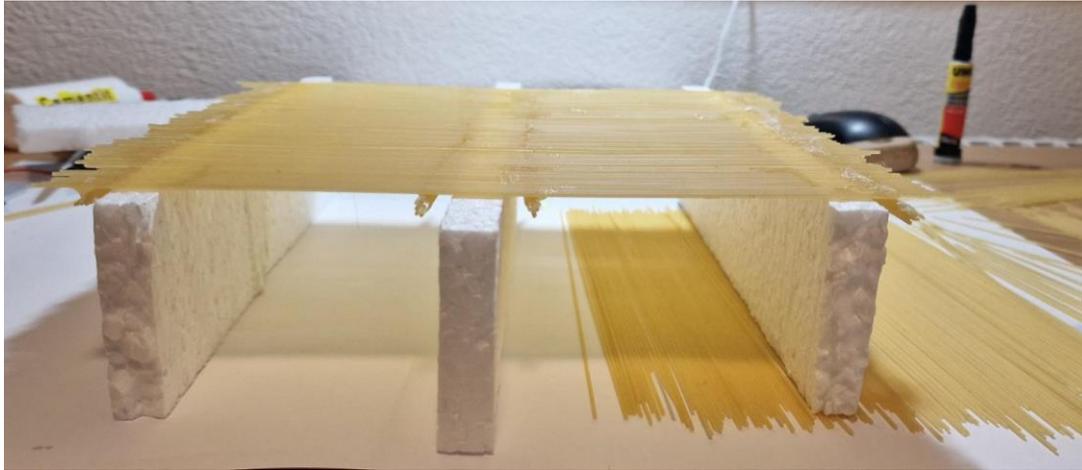


Abb. 33: Fertiger Bau der Capellinibrücke mit drei Stützen

Dimensionen und Masse der Brücke:

In der folgenden Tabelle sind die wichtigsten Angaben über die Brücke:

Durchmesser der Capellini	1.0 mm
Länge der Brücke mit der mittleren Stütze	20 cm (siehe Skizze)
Länge der Brücke ohne mittlere Stütze (belastbarer Teil)	18.5 cm (siehe Skizze)
Breite der Brücke	26 cm
Breite der Styroporstützen	1.5 cm
Masse des Trägers (Brücke ohne Stützen)	97 g

Schwierigkeiten beim Bau der Brücke:

Für das Leimen der Bündel habe ich erneut Weissleim verwendet, da ich keine gute Alternative dafür gefunden habe. Dies hat geführt, dass sich die Bündel aufgrund der hohen Feuchtigkeitsaufnahme stark verbogen haben und deshalb die mittlere Stütze nicht ganz zwischen diesem Bündel geessen ist. Ein weiteres Problem war, dass das Leimen der Styroporstützen mit flüssigen Sekundenkleber zur teilweisen Auflösung des Materials geführt hat. Deshalb griff ich zum Heisskleber als Alternative. Der Vorteil vom Einsatz des Sekundenklebers war, dass sich er Träger nicht verformt hat und ich nicht auf lange Trockenzeiten warten musste.

Belastung der Brücke:

Diese Brücke soll ein Loslager und zwei Festlager haben und auch gleichmässig verteilt werden. Um ein einfaches Loslager zu bekommen, habe ich Capellini unter einer Stütze gelegt, welche als Rollen für die Stützen fungieren sollen. Da mir die Belastung letztes Mal misslungen ist, habe ich auch hier ein paar kleinere Änderungen vorgenommen. Hierfür habe ich beim belastbaren Teil der Brücke Styroporbalken hingelegt und auf diesen die Bücher gestapelt, damit die

Stützen nicht die Last tragen, sondern alleinig der Träger dafür zuständig ist. Jedoch kam es ganz anders als geplant und die mittlere Stütze und das Loslager brachen zusammen, ohne dass der Träger irgendeinen Schaden davon genommen hat. Deswegen entschied ich mich, den Träger nochmals zu verwenden, aber etwas an den Stützen zu verändern.



Abb. 33: Bild von oben von den Styroporbalken

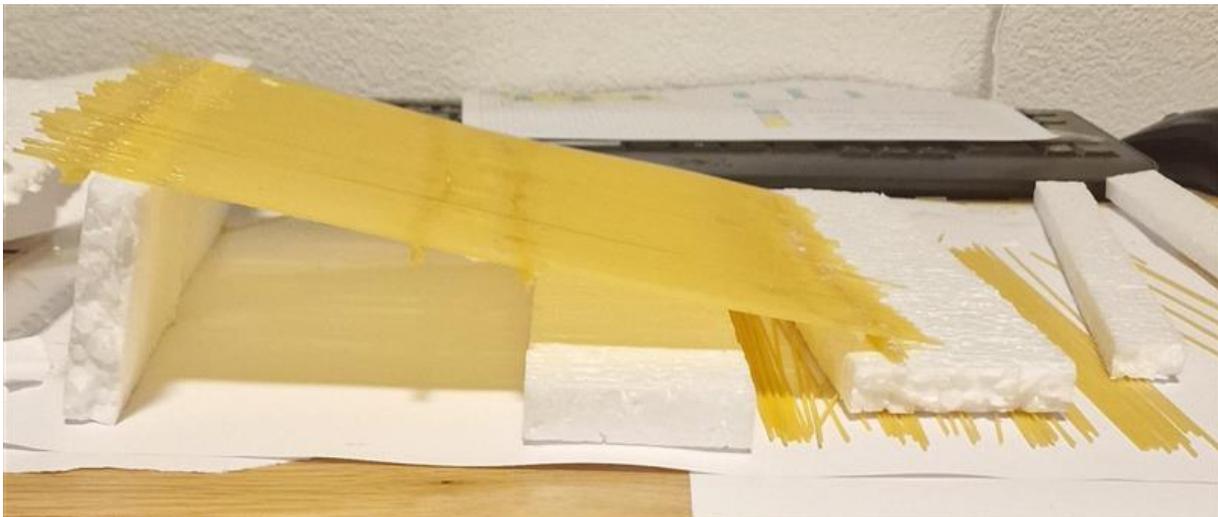


Abb. 34: Stützen haben bei der Belastung versagt

Erneuter Versuch: Capellinibrücke aus drei Holzstützen (3):

Wegen dem vorangehenden Problem beschloss ich, komplett andere Stützen zu benutzen, welche nicht mehr so hoch sind, aus einem anderen Material bestehen und eine andere Form besitzen. Deshalb nahm ich die folgenden Stützen als neue Wahl:

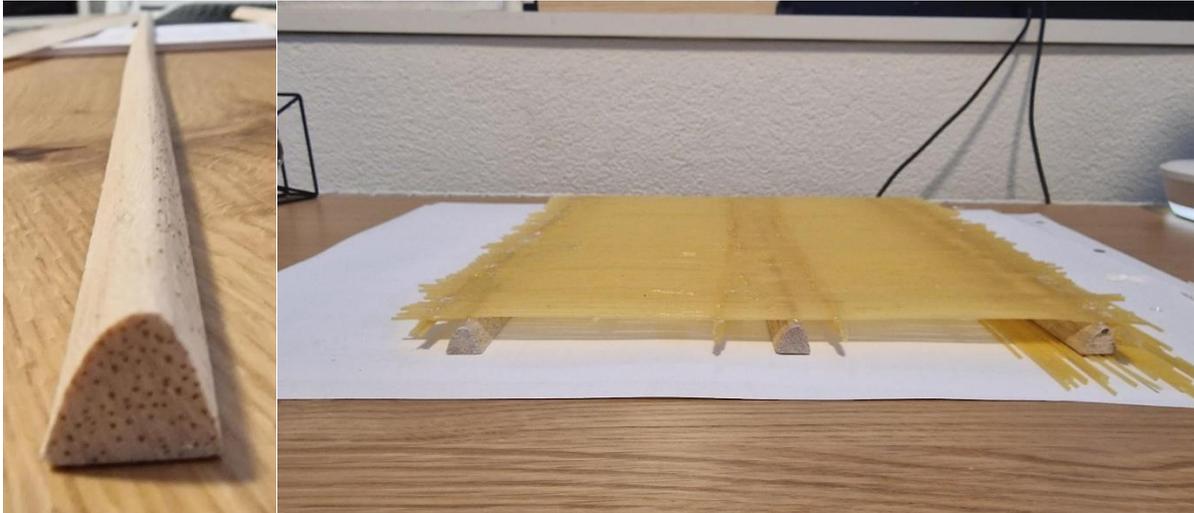


Abb. 35: Holzstütze

Abb. 36: Neuer Bau der alten Capellinibrücke

Man erkennt, dass sie kaum noch eine Höhe besitzen, aus Holz bestehen und die Form gegen oben spitzer wird. Mit dieser «Parabel-Form» sollte nun vergewissert werden, dass die Stützen möglichst nah der Theorie entsprechen, aber auch noch eine gewisse Dicke besitzen, damit man sie festleimen kann. Die niedrige Höhe soll verhindern, dass die Brücke wegen den Stützen versagt und Holz ist vorteilhafter, da es nicht die Feuchtigkeit (oder nur sehr wenig) vom Weissleim aufnimmt.

Nachdem ich die Stützen befestigt habe, konnte ich diesen Träger erneut belasten und es kam dieses Mal zu einem Bruch.

2.1.3 Capellinibrücke aus drei Stützen (4, 5)

Material und Methoden:

Diesmal habe ich die Bündel weggelassen, da diese die Vergleichbarkeit mit der Theorie erschweren und die Brücke unnötig stabilisieren. Für den Bau dieser Brücke braucht man drei Holzstützen, Massstab/Geodreieck und Weissleim. Hierfür legt man die drei Holzstützen in einem gewissen Abstand, machte eine Schicht Weissleim darauf und platziert die Capellini auf den Stützen. Anschliessend lässt man dies trocknen und die Brücke ist damit bereit für die Belastung. Im Vergleich zum Bau der ersten Brücke erkennt man, dass es deutlich weniger Schritte braucht und der Bau im Grossen und Ganzen schneller verläuft.

Dimensionen und Masse:

In der folgenden Tabelle sind die wichtigsten Angaben über die Brücke:

Durchmesser der Capellini	1.0 mm
Länge der Brücke	24
Breite der Brücke	12 cm
Masse des Trägers (Brücke ohne Stützen)	40 g

Diesmal habe ich beim Bau geachtet, dass die Breite um einiges schmaler wird, da die Balkentheorie nur für dünne und schlanke Balken gilt.

Schwierigkeiten beim Bau der Brücke:

Da der Bau dieser Brücke einfach und wenig aufwändig war, hatte ich dementsprechend keine grossen Schwierigkeiten. Das Einzige, worauf ich achten musste, war wie bei den anderen Brücken, dass der Weissleim möglichst gut für die Belastung getrocknet war.

Belastung:

Diese Brücke sollte zwei Festlager und ein Loslager haben und ebenfalls gleichmässig verteilt werden. Der Nachteil bei der Belastung mit Styropor als Auflagen ist, dass das Styropor selbst nicht verformt wird. Jedoch beginnt sich die Brücke aufgrund der immer höher werdenden Last, zu verformen und die ganze Last wirkt beim Träger über die Kante des Styropors. Um dieses Problem zu lösen, habe ich statt Styroporauflagen Münzen verwendet. Hierfür habe ich die Münzen uniform verteilt und auf diesen Münzen mehr gestapelt. Ich habe darauf geachtet, dass ich in der Mitte dickere Münzen verwende im Vergleich zu aussen, dass sich die Last der Bücher immer noch bei der maximalen Biegung der Brücke auf alle Münzen verteilt (siehe Abb. 37). Auch hier kam es zu einer Bruchstelle.



Abb. 37: Belastung der Brücke mit Münzen

2.1.4 Capellinibrücke aus drei Stützen (5)

Der Bau dieser Brücke und die verwendeten Materialien sind identisch zur vorherigen Brücke. Der einzige Unterschied hier liegt beim Belasten der Brücke. Anstatt zwei Festlager zu verwenden, habe ich nur ein Festlager benutzt und die anderen zwei Stützen mit Rollen versehen (→ Loslager). Der Vorteil von dieser Komposition ist, dass es mit Hilfe der Cross-Methode ausrechnen kann. Beim Belasten habe ich die Bücher nicht direkt auf die Münzen gestapelt, sondern erst auf einem Holzbrett (siehe Abb. 38). Der Grund dafür ist, dass ich die Brücke später besser mit der Fachwerkbrücke vergleichen kann, welche im folgenden Abschnitt erläutert wird.



Abb. 38: Belastung der Brücke mit Münzen und einem Holzbrett

2.1.5 Capellinibrücke aus zwei Stützen (6)

Material und Methoden:

Mit den neuen Stützen aus Holz wollte ich nochmals eine Brücke mit zwei Stützen bauen, da mir der erste Versuch misslungen ist. Diesmal brauche ich jedoch deutlich weniger Materialien und der Zeitaufwand ist um einiges geringer. Man braucht zwei Holzstützen, Weissleim und einen Masstab bzw. Geodreieck. Natürlich verwende ich im Vergleich zum ersten Mal statt Spaghetti Capellini. Der Bau verläuft dabei identisch, wie die beiden vorherig geschilderten Brücken mit dem Unterschied, dass man nur zwei Stützen parallel zueinander in dem gewünschten Abstand legt. Am Schluss sollten noch Capellini unter einer der beiden Stützen gelegt werden, welche die Funktion von Rollen erfüllen, damit es sich um eine Loslager-Festlager-Brücke handelt. Wie wir im Theorieteil sehen konnten, befinden wir uns dann im statisch bestimmten Fall und können die wichtigsten Schnittgrößen leicht von Hand ausrechnen. (Siehe Kap. 1.3.1)

Dimensionen und Masse:

Durchmesser der Capellini	1.0 mm
Länge der Brücke	24 cm
Breite der Brücke	12 cm
Masse des Trägers (Brücke ohne Stützen)	40 g

Wie man an den Ausmassen erkennen kann, sind sie dieselben wie bei der Capellinbrücke aus drei Stützen. Ich habe mich deswegen dazu entschieden, um sie später besser mit den anderen Brücken vergleichen zu können.

Schwierigkeiten beim Bau der Brücke:

Diese Brücke hatte mir wegen ihrem einfachen Design keine besonderen Schwierigkeiten bereitet. Jedoch musste ich mir beim Belasten dieser Brücke um einiges mehr Gedanken machen.

Belastung der Brücke:

Auch hier habe ich die Entscheidung getroffen, die Belastung mit Münzen auszuführen. Dies soll die Vergleichbarkeit mit den anderen Brücken später erleichtern. Die Münzstapel sollten hin zur Mitte des Tragwerks wie bei den anderen Brücken grösser sein, da es bei der Brücke zur Biegung bei einer Last kommt und die Münzstapel in der Mitte am stärksten sich vertikal verschieben. Deswegen sollen die Bücher beim Erreichen der maximalen Last im besten Fall auf alle Münzstapel gleichmässig verteilt die Kraft ausüben. Jedoch kam es beim ersten Versuch zu einem anderen Problem. Die Brücke hat sich so stark gebogen, dass das Tragwerk den Boden erreicht hat, es aber nicht zu einem Bruch bei der Brücke kam. Deswegen kam ich auf die Lösung die Höhe der Auflager mit Ordnern zu steigern, damit die Brücke diesmal nicht den Boden vor dem Bruch erreichen kann (siehe Abb. 39). Wie geplant hat es funktioniert und die Brücke brach unter einer gewissen Last zusammen.



Abb. 39: Fertige Capellinbrücke mit zwei Stützen auf zwei Ordnern

2.1.6 Fachwerkbrücke aus drei Stützen (7)

Material und Methoden:

Der Träger mit den Stützen wird genau gleich gebaut wie die vorherige Brücke aus drei Stützen. Zusätzlich zudem befestigt man je eine dicke Spaghetti in der Mitte von zwei Stützen mit Heisskleber. Dies macht man, um später das Fachwerk daran zu befestigen.

Für das Fachwerk sollten die Winkel 60° betragen und insgesamt drei gleichseitige Dreiecke sein mit der jeweiligen Höhe (siehe Abb. 40).

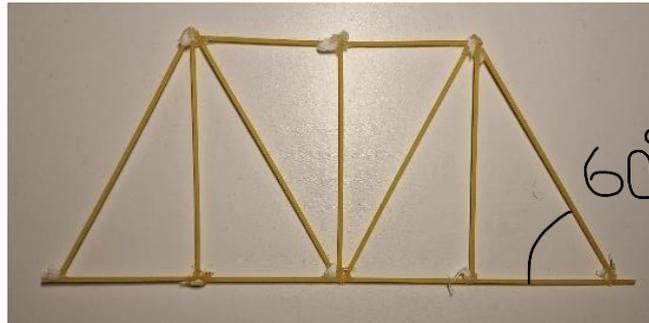


Abb. 40: Fachwerk

Für die Elemente habe ich die normalen Spaghetti genutzt und mit Hilfe von Heisskleber aneinander befestigt. Schliesslich habe ich die beiden Fachwerke an der Brücke festgeleimt und oben am Fachwerk mit drei Spaghetti stabilisiert, damit das Fachwerk senkrecht zur Brücke steht.

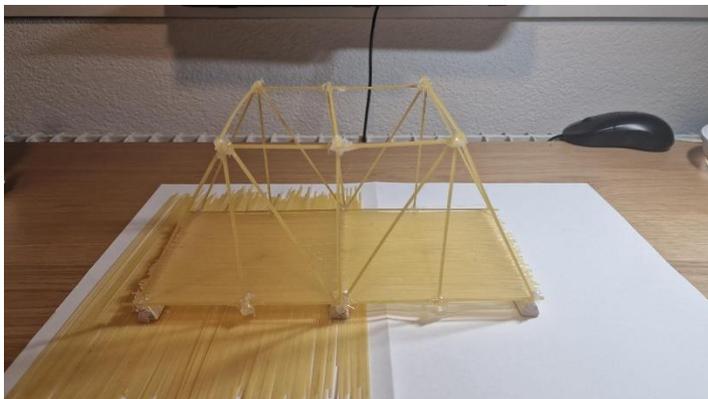


Abb. 41: Fertige Fachwerkbrücke

Dimensionen und Masse:

In der folgenden Tabelle sind die wichtigsten Angaben über die Brücke:

Durchmesser der Capellini	1.0 mm
Durchmesser Spaghetti (Fachwerk)	1.7 mm
Länge der Brücke	24
Breite der Brücke	12 cm
Masse des Trägers (Brücke ohne Stützen)	54 g

Schwierigkeiten beim Bau der Brücke:

Der Bau dieser Brücke war mit am Abstand der zeitintensivste und herausforderndste Bau von allen Brücken. Die einzelnen Spaghetti mit Heisskleber in die richtige Position bzw. aneinander zu kleben, brauchte viel Geduld und Fingerspitzengefühl. Wenn man zu viel Druck ausgeübt hat auf die Spaghetti, drohten sie, zu brechen. Im Grossen und Ganzen bin ich mit dem Bau dieser Brücke sehr zufrieden und war auch etwas stolz auf mich.

Belastung der Brücke:

Für die Belastung dieser Brücke musste ich mir etwas einfallen lassen, da ich dieses Problem nicht mit den bisherigen Methoden bewältigen konnte. Jedoch kam ich auf die geniale Idee, ein langes Holzbrett zu nutzen, welches ungefähr die Breite dieser Brücke besitzt und gleichzeitig lang sowie stabil genug war, die Bücher danebenzustapeln, ohne zu brechen (siehe Abb.). Die Stützen sollten aus zwei Loslagern und einem Festlager bestehen, also genau wie die vorherige Brücke. Somit gelang es mir auch hier, das Problem zu lösen und die Brücke identisch zur vorherigen zu belasten, sodass ich die Resultate später besser miteinander vergleichen kann.

2.1.6 Zusammenfassung der Versuchsdurchführungen

Damit man sich nun die verschiedenen Brücken vor Augen führen kann, sind sie auf der folgenden Seite mit den wichtigsten Erkenntnissen in einer Tabelle zusammengefasst:

	Art	Auflager	Stützen	Ausmasse (cm)	Gewicht (g)
(1)	Einfeldträger	(2 FL)	Styropor	11.5 · 26	130
(2)	Zweifeldträger	(2 FL + 1 LL)	Styropor	18.5 · 26	97
(3)	Zweifeldträger	(2 FL + 1 LL)	Holz	18.5 · 26	97
(4)	Zweifeldträger	(2 FL + 1 LL)	Holz	24 · 12	40
(5)	Zweifeldträger	(1 FL + 2 LL)	Holz	24 · 12	40
(6)	Einfeldträger	(1 FL + 1 LL)	Holz	24 · 12	40
(7)	Fachwerkbrücke	(1 FL + 2 LL)	Holz	24 · 12	54

Die Abkürzungen FL und LL stehen für Festlager bzw. Loslager. Die grau markierte Zeile bedeutet, dass die Brücke aus Spaghetti gebaut wurde. Alle anderen Brücken bestehen aus Capellini bis auf das Tragwerk der Fachwerkbrücke, welche auch aus Spaghetti ist.

3. Resultate

Die Spannung habe ich lange hochgehalten. Jetzt stellt sich aber die Frage, wo die Brücken genau versagt haben und bei welcher Last? In diesem Zusammenhang ist es auch interessant, das maximale Biegemoment, die maximale Querkraft und die entsprechende Biege- bzw. Schubspannung einerseits von Hand und andererseits mit dem Online-Programm (mit der FE-Methode) zu ermitteln.

3.1 Bruchstellen der Brücken

Im folgenden Abschnitt wird die Bruchstelle jeder einzelnen Brücke genauer untersucht und bei welcher Last dies zu Stande kam.

3.1.1 Spaghetti Brücke (1)

Bei der ersten Brücke (Festlager-Festlager-Kombination), welche noch aus Spaghetti bestand, musste ich aufgrund der zu hohen Stabilität die Art der Belastung anpassen und deshalb verteilte ich die Last auf eine deutlich kleinere Fläche (siehe Abb.). Bei einem Gewicht von ungefähr 5 kg kommt es zum Versagen der Brücke und die Bruchstelle sieht wie folgt aus:



Abb. 42: Belastung der Spaghettibrücke



Abb. 43: Bruchstelle der Spaghettibrücke

Man kann erkennen, dass die Spaghetti in der Mitte durchbrochen wurden, der Rest aber intakt ist, da sie nur an dieser Stelle belastet worden ist (siehe Abb.). Mit diesen Resultaten kann man nur wenig anfangen, da die Brücke nicht uniform, d.h. gleichmässig, belastet wurde. Jedoch habe ich von diesem Fehler gelernt und bei den kommenden Brücken habe ich befriedigendere Ergebnisse erhalten.

3.1.2 Capellini Brücke (2,3)

Hier handelt es sich bekanntlich um eine Brücke aus drei Stützen mit einer Festlager-Festlager-Loslager-Kombination. Da die Styroporstützen der Capellini bei einem Gewicht von ca. 7.75 kg zusammenbrachen (siehe Abb.), schauen wir uns die Belastung des Tragwerks dieser Brücke mit den Holzstützen an. Dabei kam es bei einem Gewicht von ca. 15 kg bei einer gleichförmigen Last zum Einsturz und die Bruchstelle sieht man auf der folgenden Abbildung:

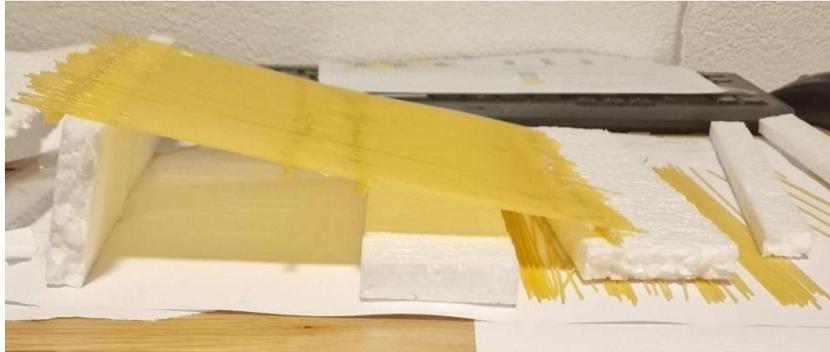


Abb. 44: Einsturz der Stützen



Abb. 45: Bruch der Capellinibrücke von vorne



Abb. 46: Bruchstelle der Capellinibrücke von oben

Man erkennt, dass die Bruchstelle erstaunlicherweise nicht in der Mitte liegt, sondern in der Nähe der rollenden Stütze zu einem Bruch kam, was nicht der anfänglichen Intuition entspricht. Nun ist es spannend, ob das bei den folgenden Brücken genauso sein wird oder man ein anderes Resultat erhalten wird.

3.1.3 Cappellini Brücke (4,5)

Bei den nächsten beiden Brücken handelt es sich um Capellinibrücken aus drei Holzstützen, welche sich nur in der Auflagerkombination unterscheiden. Während die eine zwei Festlager und ein Loslager hat, hat die andere Brücke zwei Loslager und ein Festlager. Aufgrund dieser Ähnlichkeit kann man sie gut miteinander vergleichen, weswegen sie beide in einem Abschnitt stehen. Die Bruchstelle der einzelnen Brücken sieht wie folgt aus:

Capellinibrücke (4) (Festlager-Festlager-Loslager):

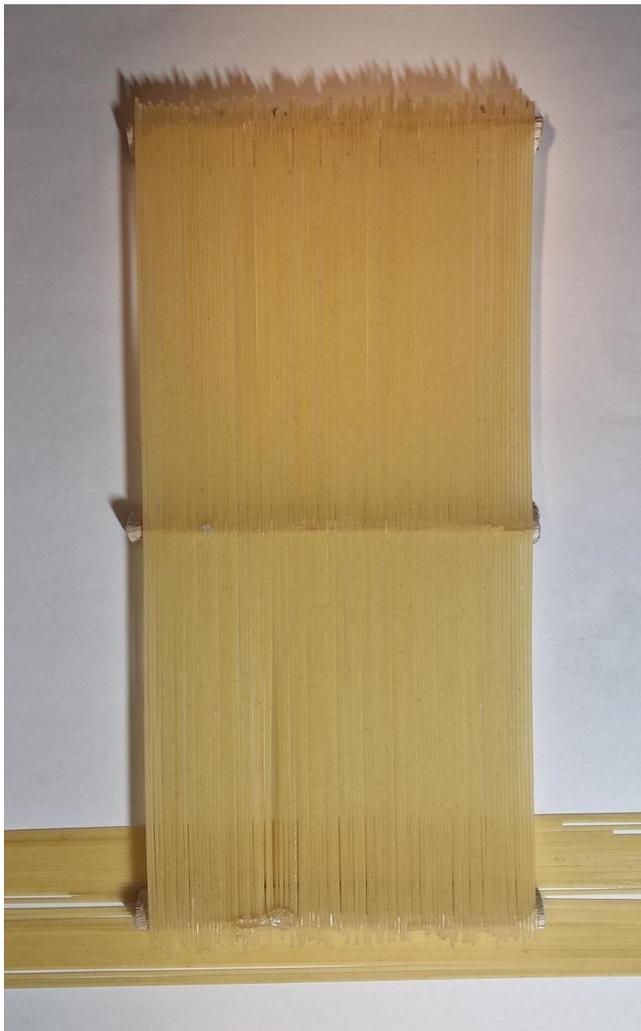


Abb. 47: Capellinibrücke (4) vor der Belastung
Die Capellini auf dem Boden dienen als Rollen



Abb. 48: Capellinibrücke (4) nach der Belastung
Die Capellini auf dem Boden dienen als Rollen

Capellinibücke (5) (Festlager-Loslager-Loslager):



Abb. 49: Capellinibücke (5) mit Münzen belastet



Abb. 49: Capellinibücke (5) nach der Belastung

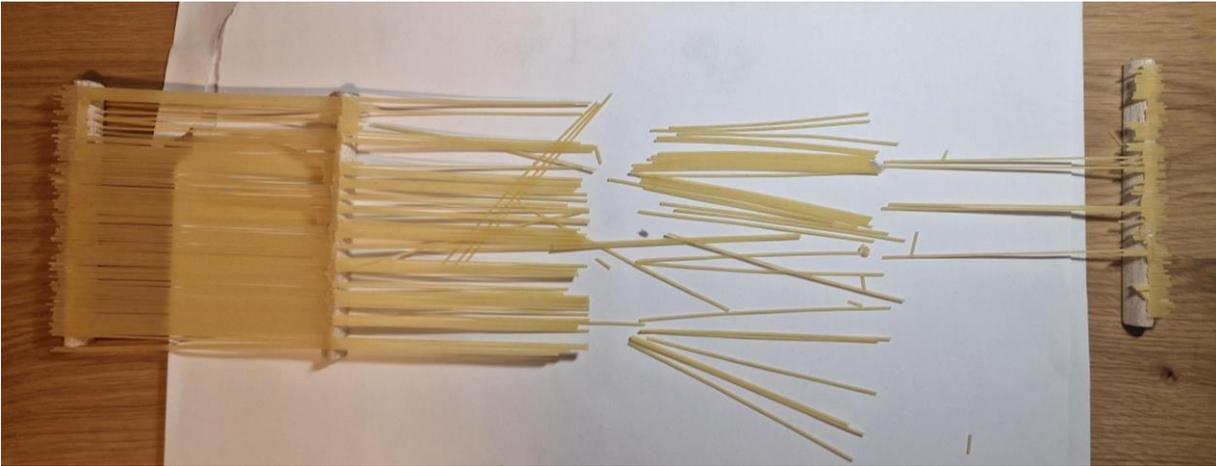


Abb. 50: Bruchstellen der Capellinibücke (5)

Man erkennt, dass an beiden dieser Brücken trotz einer unterschiedlichen Auflagerkombination die Bruchstelle auf der entgegengesetzten Seite des (oberen) Festlagers liegt. An der mittleren Stütze kam es auch zum Teil zu kleineren Brüchen wobei die klare Bruchstelle unten liegt (siehe Abbildungen 49 und 50.). Interessant zu wissen ist, ob die Brücken auch bei ähnlichen Lasten versagt haben oder, ob es hier Unterschiede gibt:

Die Capellinibrücke (4) mit zwei Festlagern ist unter einer Last von ca. 13.5 kg und die Capellinibrücke (5) mit zwei Loslagern ist unter einer Last von ca. 13.75 kg gebrochen. Somit beträgt der Mittelwert 13.625 kg und die Standardabweichung mit 0.125 kg ist nur sehr gering. Dies erstaunt nicht, da beide Brücken gleich gebaut und ähnlich belastet worden sind und der einzig kleine Unterschied in der Auflagerkombination liegt. Mit diesen Ergebnissen erkennt man, dass die Brücken mit nur einem Eigengewicht ohne Stützen von 40 g das 340-fache von sich selbst tragen konnten. Dieser Faktor ist immens und beeindruckt sehr! Doch wie gross wird der Faktor bei den folgenden Brücken aussehen? Wird es grösser oder kleiner sein?

3.1.4 Capellinibrücke (6)

Es handelt sich hierbei um eine Capellinibrücke aus zwei Holzstützen mit einer Festlager-Loslager-Kombination Da die Belastung der ersten Brücke mit zwei Stützen misslungen ist und der Bau noch nicht fortgeschritten war, wird die Belastung dieser Brücke genauer analysiert. Auf dem folgenden Bild sieht man die Bruchstelle:



Abb. 51: Capellinibrücke mit zwei Stützen



Abb. 52: Bruchstelle Capellinibrücke mit zwei Stützen

Diese Belastung ist am besten gelungen und man erkennt eine klare Bruchlinie nahe der rollenden Stütze. Die Brücke versagte bei einer Last von ca. 12 kg bei einem Eigengewicht ohne Stützen von 40 g (wie die anderen Capellinibrücken mit drei Stützen), was bedeutet, dass die Brücke das 300-fache von seinem eigenen Gewicht tragen konnte. Der Faktor ist demnach kleiner als bei den Brücken mit drei Stützen, was auch Sinn macht, da alle Grössen dieselbe sind wie bei den beiden vorherigen Brücken. Der einzige Unterschied besteht in der Anzahl der Auflager, weswegen diese Brücke mit einem Auflager weniger eine geringere Stabilität aufweist.

3.1.5 Fachwerkbrücke (7)

Diese Brücke soll nach der Theorie am stabilsten sein und deshalb die grösste Last bis zum Bruch ertragen. Die Fachwerkbrücke ist auch die Brücke, in der ich am meisten Aufwand hineingesteckt habe und die Erwartungen für ein aussagekräftiges Ergebnis dementsprechend am grössten sind. Nun werden wir sehen, ob es die stabilste Brücke ist und wo die Bruchstelle bei welcher Last entstanden ist:

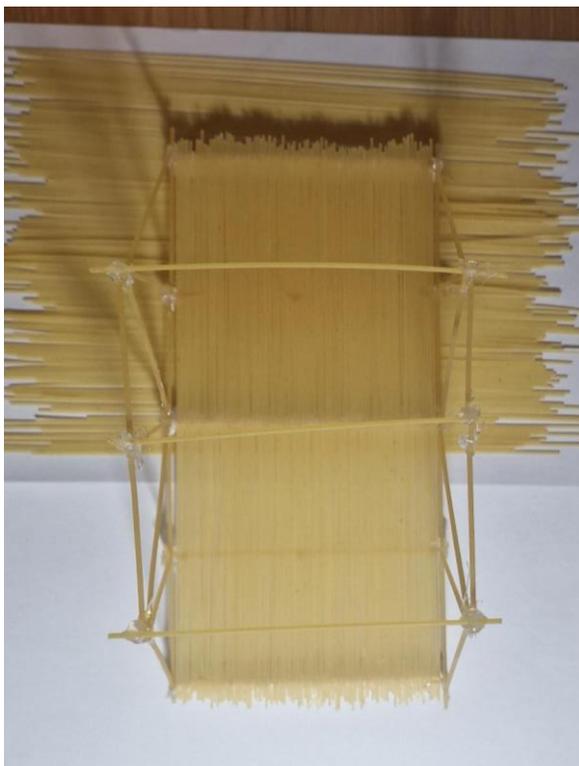


Abb. 53: Fachwerkbrücke von oben; Capellini auf dem Boden dienen als Rollen für das Loslager



Abb. 54: Bruchstellen der Fachwerkbrücke

Eine wichtige **Bemerkung**, bevor es zum Urteil kommt, ist, dass die Belastung der Brücke bis zum letzten Schluss makellos funktioniert hat. Jedoch beim Entfernen der zwei Bücherstapel es zu einem Problem kam. Da ich es nicht geschafft habe, die zwei Stapel simultan aufzuheben und der untere Stapel leicht verspätet entfernt wurde, hat es dazu geführt, dass für kurze Zeit eine grosse Last nur auf dem unteren Teil der Brücke gewirkt hat. Dort kam es deshalb zu einigen Brüchen, welche bis zum letzten Zeitpunkt noch nicht vorhanden waren. Deswegen gehen

wir davon aus, dass im unteren Teil zwischen dem Fest- und Loslager gar keine bis kaum Brüche entstanden sind. Dasselbe gilt auch beim Fachwerk der Brücke, wo ein Spaghetti nach dem Ausführen der Belastung zerbrochen ist (rot umkreist).

Mit diesen Bedingungen bzw. Berücksichtigungen erkennt man ein ähnliches Ergebnis zu den vorangehenden Brücken. Man sieht eine klare Bruchlinie am oberen Loslager sowie einige Brüche am mittleren Auflager. Man betrachte, dass die Spaghetti Stange im oberen Teil der Brücke, welche unter dem Tragwerk verlaufen ist, auch mehreren Stücken zerbrochen ist.

Jetzt kommt die spannendste Frage: Ist die Fachwerkbrücke stabiler als die Capellinbrücken ohne Fachwerk und wenn ja bzw. nein, wie viel grösser bzw. kleiner beträgt der Faktor?

Die Brücke kam bei einer Last von ca. 20 kg zum Versagen bei einem Eigengewicht ohne Stützen von 54 g. Der Faktor entspricht daher 370. Dies ist sehr überraschend klein, da ein deutlich grösserer Wert erwartet wurde durch das stabilisierende Fachwerk. Im Vergleich zu der Capellinbrücke ohne Fachwerk mit einem Faktor von 360 ist der Unterschied nur sehr klein. Wieso die Differenz nicht grösser ist und welche Fehler/Ungenauigkeiten zu diesem Ergebnis geführt haben, wird in der Diskussion genauer erläutert.

Schliesslich darf man nicht vergessen, dass das die Ergebnisse von der Praxis sind und es gewisse Abweichungen zur Theorie gibt. Wie gross diese Abweichungen zur Theorie sind, wird später noch genauer ausgeführt und erklärt werden.

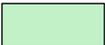
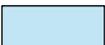
3.1.6 Zusammenfassung der Resultate

Wie bei den Versuchsdurchführungen werden auch bei den Resultaten die wichtigsten Ergebnisse in einer Tabelle zusammengefasst. Zusätzlich ist die Tabelle für die Versuchsdurchführungen mit aufgeführt.

	Art	Auflager	Stützen	Ausmasse (cm)	Gewicht (g)
(1)	Einfeldträger	(2 FL)	Styropor	11.5 · 26	130
(2)	Zweifeldträger	(2 FL + 1 LL)	Styropor	18.5 · 26	97
(3)	Zweifeldträger	(2 FL + 1 LL)	Holz	18.5 · 26	97
(4)	Zweifeldträger	(2 FL + 1 LL)	Holz	24 · 12	40
(5)	Zweifeldträger	(1 FL + 2 LL)	Holz	24 · 12	40
(6)	Einfeldträger	(1 FL + 1 LL)	Holz	24 · 12	40
(7)	Fachwerkbrücke	(1 FL + 2 LL)	Holz	24 · 12	54

	Auflager	Gewicht (kg)	Last (kg)	Last/Gewicht	Bruchstelle
(1)	(2 FL)	0.130	5	38	in der Mitte
(2)	(2 FL + 1 LL)	0.097	7.75	80	Stützen versagt
(3)	(2 FL + 1 LL)	0.097	15	155	am Loslager
(4)	(2 FL + 1 LL)	0.040	13.5	338	v.a am Loslager, aber auch in der mittleren Stütze beidseitig
(5)	(1 FL + 2 LL)	0.040	13.75	344	aussen am Loslager, z.T. mittig, aber nur einseitig
(6)	(1 FL + 1 LL)	0.040	12	300	klare Bruchlinie am Loslager
(7)	(1 FL + 2 LL)	0.054	20	370	an den Loslagern, aber nur die mittleren Capellinibrücken sind davon betroffen

Legende:

	= Einfeldträger
	= Zweifeldträger
	= Fachwerkbrücke

LL = Loslager; FL = Festlager

3.2 Berechnungen von Hand und mit FEM

In diesem Abschnitt werden die Berechnungen der maximalen Biegemomente und Querkräfte sowie der entsprechenden Schub- bzw. Biegespannungen durchgeführt. Dies wird einerseits mit Hilfe der Theorie zu einem Einfeldträger und der Cross-Methode und andererseits mit einem Statik-Programm zur FE-Methode ermittelt und grafisch als Tabelle und Diagramm dargestellt. Dafür eignet sich zum einen die Capellinibrücke (6) mit zwei Stützen und einer Festlager-Loslager-Kombination und zum anderen die Capellinibrücke (5) mit drei Stützen und einer Festlager-Loslager-Loslager-Kombination. Die Capellinibrücke (6) ist statisch bestimmt und die Grössen können mit der Theorie zum Einfeldträger bestimmt werden. Mit dem Cross-Verfahren werden die wichtigsten Grössen zur Capellinibrücke (5) ermittelt. Da die Capellinibrücke (4) bis auf die Auflagerkombination dieselbe wie (5) ist, wird das Cross-Verfahren nur einmal an der Brücke (5) durchgeführt.

3.2.1 Berechnungen am Einfeldträger

Berechnung mit Hilfe der Theorie am Einfeldträger, also von Hand:

Die Capellinibrücke aus zwei Holzstützen hat die Ausmasse 24 cm · 12 cm und dementsprechend eine Fläche von 288 cm² bzw. 0.0288 m². Die maximale Last, welche es tragen konnte, beträgt 12 kg, was einer Kraft von 117.72 N entspricht. Für die Berechnung der Kraft multipliziert man die Masse des Tragwerks $m = 12$ kg mit der Erdbeschleunigung $g = 9.81$ m/s². Somit erhält man für die Flächenlast $\bar{s} = 4'087.5$ N/m². Mit einer einfachen Umrechnung kann man die Flächenlast zu einer Punktlast umwandeln, welche im Schwerpunkt des Tragwerks liegt, also genau in der Mitte. Hierfür multipliziert man die Flächenlast mit der Länge und Breite des Tragwerks. Man erhält schliesslich 117.72 N. Der Wert für die Streckenlast kann später auch hilfreich sein, damit man diesen direkt in die Formel einsetzen kann. Dabei multipliziert man die Flächenlast mit der Breite und erhält $q_0 = 490.50$ N/m.

Nachdem wir diese Anfangsüberlegungen durchgeführt haben, folgen wir schliesslich den genauen Ablauf der Berechnungen vom Kap. 1.3.2, um das Biegemoment und die Querkraft zu bestimmen:

Erstmals berechnen wir die vertikalen Auflagerkräfte an den Auflagern A (Festlager) und B (Loslager) mit den Formeln:

$$A_v = q_0 \cdot \frac{l}{2} \quad \text{und} \quad B_v = q_0 \cdot \frac{l}{2}$$

Wir halten sowohl für A_v als auch für B_v die Auflagerkraft 58.86 N, welche genau die Hälfte der Punktlast ist.

Für die Bestimmung der maximalen Querkraft reicht es zu wissen, dass sie beim Auflager A maximal ist, bzw. der Auflagerkraft beim Festlager entspricht. Also beträgt die Querkraft V 58.86 N.

Dies lässt sich auch mit Hilfe der Formel für die Querkraft überprüfen, welche unten nochmals aufgeführt ist:

$$V = -q_0 \cdot x + q_0 \cdot \frac{l}{2}$$

Setzt man für die Variable x den Wert 0 ein, ist das die Querkraft beim Auflager A. Die Formel vereinfacht sich zu diesem Ausdruck:

$$V_{max} = q_0 \cdot \frac{l}{2}$$

Mit Einsetzen der Streckenlast und der Länge der Brücke erhält man für die maximale Querkraft denselben Wert von 58.86 N.

Für die Bestimmung des maximalen Biegemoments machen wir uns dafür der Formel zu nutzen, welche wir einmal hergeleitet haben:

$$M = -\frac{1}{2} q_0 \cdot x^2 + q_0 \cdot \frac{l}{2} \cdot x$$

Betrachtet man hier die Formel mathematisch, kann man schnell erkennen, dass es sich um eine quadratische Gleichung handelt in der Form:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Wobei $a = -\frac{1}{2} q_0$, $b = q_0 \cdot \frac{l}{2}$ und $c = 0$ ist.

Geometrisch beschreibt eine quadratische Gleichung, welche man auch als quadratische Funktion ansehen kann, eine nach unten geöffnete Parabel. Somit ist das maximale Biegemoment genau beim Scheitelpunkt. Da wir wissen, dass das Biegemoment an beiden Auflagern gleich null ist und es sich hierbei um eine Parabel handelt, können wir mit diesen Bedingungen wegen Symmetriegründen folgern, dass der Scheitelpunkt genau in der Mitte liegt. Das heisst man erhält für $x = l/2$ das maximale Biegemoment. Setzt man dies in die Formel ein und vereinfacht den Ausdruck, erhält man:

$$M_{max} = \frac{q_0 \cdot l^2}{8}$$

Für $q_0 = 490.50 \text{ N/m}$ und $l = 0.24 \text{ m}$ bekommt man für das maximale Biegemoment $M_{max} = 3.5316 \text{ Nm}$, aufgerundet ca. 3.53 Nm .

Schliesslich können wir die entsprechende Schub- bzw. Biegespannung berechnen. Die Bestimmung der Schubspannung ist einfach und man braucht folgende Formel:

$$\sigma = \frac{V_{max}}{A}$$

Wobei V_{max} die die maximale Querkraft und A die Querschnittsfläche ist.

Da die Brücke aus vielen einzelnen zylinderförmigen Capellini besteht, können wir die Form als Quader mit dem Durchmesser als Höhe annähern, um uns viel Rechenaufwand zu ersparen.

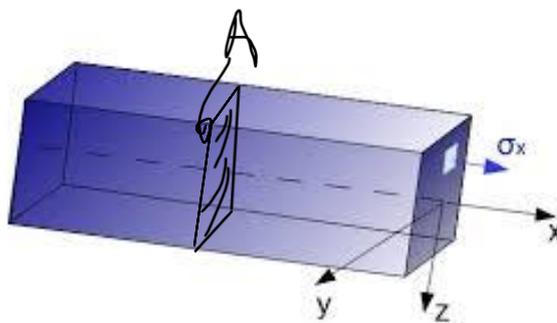


Abb. 55: Balken mit Querschnitt

Auf der Abbildung wird die Querschnittsfläche A illustriert und die Achsen des Koordinatensystems sind in der Art festgelegt worden, dass es die Berechnung erleichtert. Die z-Achse gibt die Höhe, die y-Achse die Breite und die x-Achse die Länge an.

Die Querschnittsfläche A erhält man, wenn die Breite der Brücke mit der Höhe bzw. dem Durchmesser einer Capellini multipliziert wird:

$$A = 0.12 \text{ m} \cdot 0.001 \text{ m} = 0.00012 \text{ m}^2$$

Da nun die Querschnittsfläche und die Querkraft bekannt sind, erhält man für die die maximale Schubspannung:

$$\tau_{max} = \frac{V_{max}}{A} = \frac{58.86 \text{ N}}{0.00012 \text{ m}^2} = 490'500 \text{ Pa} \approx \mathbf{490 \text{ kPa}}$$

Die maximale Biegespannung hingegen lässt sich mit folgender Formel ermitteln:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot z}{I_y}$$

Mit Hilfe diesen Abbildungen kann man das Flächenträgheitsmoment bestimmen und verstehen:

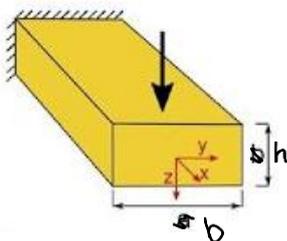


Abb. 56: Balkenquerschnitt

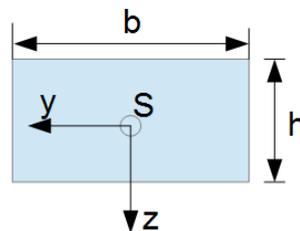


Abb. 57: Flächenträgheitsmoment an einem Balken

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{yz} = 0$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_p = \frac{hb}{12}(h^2 + b^2)$$

Die Abbildung links zeigt nochmals die Vereinfachung der ursprünglichen Form der Brücke von einem anderen Winkel auf. Dabei soll die x-Achse aus dem Bild herausgehen, also durch die Längsachse des Quaders. Im rechten Bild sehen wir den Querschnitt genauer. Durch den Schwerpunkt S verläuft die neutrale Achse der Brücke und geht in Richtung y weiter. Der Abstand zur neutralen Faser wird mit der z-Achse angegeben. Ganz rechts sind mehrere Formeln für das Flächenträgheitsmoment aufgelistet, wobei wir nur die erste davon brauchen, welche keine Masse beinhaltet, da keine Bewegung entsteht. Auch übt das Flächenträgheitsmoment einen Widerstand bezüglich der y-Achse aus, da es infolge der Belastung zur Biegung kommt.

Damit wir die maximale Biegespannung erhalten, welche die Brücke ganz aussen erfährt, nehmen wir für $z = h/2$.

Mit diesen Informationen können wir die Biegespannung berechnen, indem wir die bisherigen Erkenntnisse hier einsetzen:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot z}{I_y} = \frac{\frac{q_0 \cdot l^2 \cdot h}{8} \cdot \frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{490.50 \frac{N}{m} \cdot 0.0576 m^2 \cdot \frac{0.001 m}{2}}{\frac{0.12 m \cdot 10^{-9} m^3}{12}} = 176'580'000 Pa$$

Die Biegespannung beträgt folglich ca. **177 MPa**.

In der folgenden Tabelle sind alle Werte eingetragen sowie an weiteren Stellen ausgewertet worden, damit man sie später in der Diskussion besser mit den Werten des Statik-Programms vergleichen kann:

	Stelle der Auswertung		
	x = 0 cm	x = 12 cm	x = 24 cm
Auflagerkraft	58.86 N	-	58.86 N
Querkraft V	58.86 N	0 N	-58.86 N
Biegemoment M	0 Nm	3.53 Nm	0 Nm
Biegespannung σ	0 Pa	177 MPa	0 Pa
Scherspannung τ	490 kPa	0 Pa	490 kPa

Für die gerundeten Werte erhält man:

	Stelle der Auswertung		
	x = 0 cm	x = 12 cm	x = 24 cm
Auflagerkraft	60 N	-	60 N
Querkraft V	60 N	0 N	-60 N
Biegemoment M	0 Nm	4 Nm	0 Nm
Biegespannung σ	0 Pa	177 MPa	0 Pa
Scherspannung τ	490 kPa	0 Pa	490 kPa

Berechnung mit Hilfe des Statik-Programms, also FEM:

Um die Schnittgrößen und Spannungen zu berechnen, habe ich das Online-Programm Frilo benutzt, welches diese Werte mit der FE-Methode ermittelt. Dies ist ein Programm, welches auch häufig bei Bauingenieure Gebrauch findet. Man gibt die wichtigsten Größen wie die Streckenlast, Anzahl und Art der Stützen sowie die Ausmasse der Brücke an und das Programm spuckt ein Ergebnis heraus.

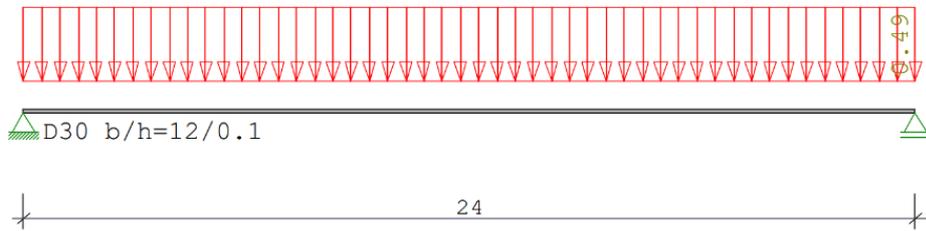
Eine wichtige **Bemerkung**: Bei diesem Programm muss man ein Material angeben, mit welchem das Programm rechnen soll. Da es das Material Spaghetti nicht gibt, habe ich das nächste Material ausgewählt, welches Holz ist. Die Wahl des Materials hat jedoch keinen Einfluss auf die Berechnung der Schnittkräfte und Schub- sowie Biegespannungen, da die Ermittlung dieser Größen ohne einen materialspezifischen Wert (=Elastizitätsmodul) erfolgt.

Alle für uns nicht relevanten Ergebnisse habe ich mit **roter Farbe** weggestrichen.

Auf den nächsten Seiten sind die für uns wichtigen Ausschnitte der Ergebnisse des Programms in zusammengefasster Form aufgeführt. (Die detaillierten Resultate sind im Anhang.)

Träger mit zwei Stützen

Maßstab 1 : 2



Holzträger D30
Mit Schubverformung gerechnet: $G = 600 \text{ N/mm}^2$

System	Länge	Querschnittswerte			
Feld	L (m)	b (cm)	h (cm)	I _y (cm ⁴)	
1	0.24	konstant	12.0	0.1	0.0

Belastung (kN,m)	Feld	Typ	EG	Gr	Lasttyp:								
					g _{l/r}	q _{l/r}	Faktor	Abstand	Länge	ausPOS	Phi		
	1	1	A		0.00	0.49	1.00						

Auflagerkräfte/Querkräfte/Biegemomente

Auflagerkräfte							(kN)	
Stütze	aus g	max q	min q	Vollast	max	min		
1	0.00	0.06	0.00	0.06	0.06	0.00		
2	0.00	0.06	0.00	0.06	0.06	0.00		
Summe:	0.00	0.12	0.00	0.12	0.12	0.00		

Ergebnisse für 1-fache Lasten

Die Schnittgrößen sind mit Schubverformung gerechnet.

Feldmomente Maximum								(kNm , kN)	
Feld		M _f	M _{li}	M _{re}	V _{li}	V _{re}	komb		
1	x ₀ =	0.12	0.00	0.00	0.00	0.06	-0.06	2	

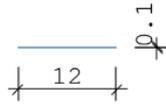
Feldmomente Minimum								(kNm , kN)	
Feld		M _f	M _{li}	M _{re}	V _{li}	V _{re}	komb		
1	x ₀ =	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1	

Stützmomente Maximum								(kNm , kN)	
Stütze		M _{li}	M _{re}	V _{li}	V _{re}	max F	min F	komb	
1		0.00	0.00	0.00	0.06	0.06	0.00	2	
2		0.00	0.00	-0.06	0.00	0.06	0.00	2	

Biegespannung und Schubspannung

Bemessung: DIN 1052:2008 D30

~~Nutzungsklasse 1 $k_{def} = 0.60$ $\gamma_M = 1.30$ $\gamma_M(A) = 1.00$~~



~~$E_{mean} = 1000 \text{ kN/cm}^2$ $G_{mean} = 60 \text{ kN/cm}^2$
 $f_{m,k,My} = 30.0 \text{ N/mm}^2$ $f_{m,k,Mz} = 30.0 \text{ N/mm}^2$
 $f_{v,k,Vz} = 3.0 \text{ N/mm}^2$ $f_{v,k,Vy} = 3.0 \text{ N/mm}^2$~~

Spannungen mit FLBemHo901 gerechnet. (Version 9.0.4.8)

~~Normalspannungen $b/h = 12/0.1$~~

Der Druckgurt ist nur an den Auflagern gehalten.

Feld Nr.	x (m)	$M_{y,d}$ (kNm)	$\sigma_{d,o}$ (N/mm ²)	$\sigma_{d,u}$ (N/mm ²)	k_m	k_{mod}	$\sigma_{d,fm,d}$	komb
1	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1
	0.12	0.01	-264.60	264.60	1.00	0.80	14.33 !	A 2
	0.24	0.00	0.00	0.00	1.00	0.80	0.00	A 2

Schubspannungen $b/h = 12/0.1$

Stütze Nr.	x (m)	$V_{z,d}$ (kN)	τ_D (N/mm ²)	k_{mod}	$\tau_{d/fv,d}$	komb
1 re	0.001	0.09	1.09	0.80	0.59	A 2
2 li	0.001	-0.09	1.09	0.80	0.59	A 2

Ergänzungen: Oberhalb der Werte sind immer die Einheiten angegeben, welche sich auf die jeweilige Spalte beziehen. Es werden einige Abkürzungen genutzt, wie beispielsweise V li, M re. Das li steht immer für links und das re immer für rechts. Bei der Biegespannung wird noch differenziert zwischen $\sigma_{d,o}$ und $\sigma_{d,u}$. Dabei meint man mit o oben und mit u unten. Dies steht für die äussere Faser. Mit x bzw. x_0 wird die Stelle gemeint, an der beispielsweise die Schubspannung oder das Biegemoment ausgewertet wurde. Für die Schnittgrössen und Spannungen werden die herkömmlichen Formelzeichen verwendet.

Bei der Biege- und Schubspannung steht noch ein kleines oder grosses d/D. Dies bedeutet Design, was wiederum heisst, dass die Werte mit einem sog. **Sicherheitsfaktor** multipliziert wurden. Die Definition von Wikipedia ist dabei einleuchtend:

Der Sicherheitsfaktor in der technischen Mechanik [...] gibt an, um welchen Faktor die Versagensgrenze eines Bauwerks, Bauteils oder Materials höher ausgelegt wird, als sie aufgrund theoretischer Ermittlung, z. B. aufgrund einer statischen Berechnung, sein müsste. [...] Durch einen Sicherheitsfaktor wird vermieden, dass durch Toleranzen bei Material, Herstellung, Lastannahmen und nicht nachgewiesene, geringere Einflüsse das Bauteil versagt. [34]

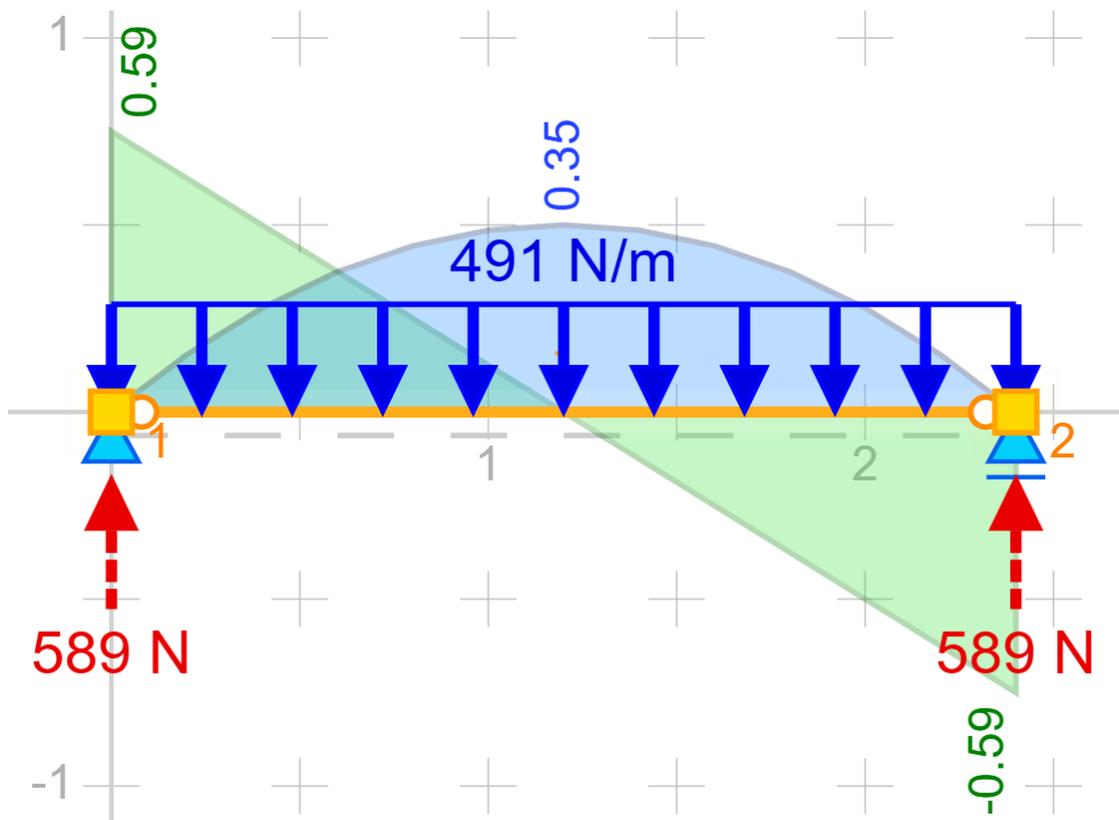
Somit wird der Sicherheitsfaktor für echte Bauwerke in der Realität verwendet und gibt eine gewisse Reserve bis zur Versagensgrenze an. Das Programm rechnet dabei mit dem Sicherheitsfaktor 1.5.

Hier unten habe ich nochmals alle wichtigen Werte des Statik-Programms in einer Tabelle zusammengefasst und die Einheiten angepasst. Die Schub- und Biegespannungen sind dabei abzüglich dem Sicherheitsfaktor:

	Stelle der Auswertung		
	x = 0 cm	x = 12 cm	x = 24 cm
Auflagerkraft	60 N	-	60 N
Querkraft V	60 N	0 N	-60 N
Biegemoment M	0 Nm	4 Nm	0 Nm
Biegespannung σ	0 Pa	177 MPa	0 Pa
Scherspannung τ	490 kPa	0 Pa	490 kPa

Bemerkung: Bei der Schubspannung wurde der Sicherheitsfaktor gleich zweimal hineinverrechnet. Einmal bei der Querkraft, welche die Scherspannung induziert, und einmal bei der Schubspannung selbst. Alle Werte des Programms sind gerundete Werte. Da das Programm den Wert 0 für das Biegemoment angegeben hat, da die Grösse zu klein ist, habe ich es mit der Biegespannung ausgerechnet.

Ein Vorteil dieses Statik-Programms ist, dass es den Moment- und Querkraftverlauf in einer Grafik darstellt. Leider ist die Darstellung nicht besonders schön und klein, weshalb ich es mit einem anderen Programm modelliert habe: [36]



Die **blaue Kurve** ist der **Momentverlauf (M-x)** und die **grüne Kurve** der **Querkraftverlauf (V-x)**. Die **roten Pfeile** stehen für die **Auflagerkräfte** an den Stützen. Beide Kurven sind mit den Maximalwerten beschriftet, welche in kN angegeben sind. Die Länge des Trägers auf der Darstellung ist 2.4 m, damit alle Zahlen gut ersichtlich sind. Das heisst, dass das Biegemoment 100 mal und die Querkraft sowie die Auflagerkraft 10 mal grösser sind als bei unserem Träger mit einer Länge von 0.24 m.

→Vergleichen wir diese Werte mit dem Statik-Programm Frilo, erkennen wir, dass es uns dieselben aber ungerundeten Resultate geliefert hat. Dies ist nicht gerade erstaunlich, da beide Programme auf dieselbe Art und Weise die Werte berechnen.

→Auch kann man erkennen, dass beide Kurven dieselben sind, die bereits im Theoriteil demonstriert wurden. Somit widerspiegeln die Resultate die Theorie.

3.2.2 Berechnungen am Zweifeldträger

Im nächsten Schritt berechnen wir mit Hilfe des Cross-Verfahrens die Schnittgrössen und die entsprechenden Scher- bzw. Biegespannungen. Dabei folgen wir der Anleitung, welche am Ende des Kap. Cross-Methode angegeben wird, Schritt für Schritt, um ans Ziel zu kommen.

Berechnung mit Hilfe des Cross-Verfahrens, also von Hand:

→*Hier wird die Anleitung nochmals aufgeführt (orientiert an YouTube-Videos):*

- 1) Blockieren aller Knoten. Man erhält somit lauter feste Einspannungen.
- 2) An diesem Balken lassen sich die Ausgangsmomente bzw. Einspannmomente berechnen.
- 3) Berechnung der Biege- bzw. Stabsteifigkeiten und der Verteilungsfaktoren (distributed factors).
- 4) Bestimmung der Übertragungsfaktoren (carry-over factors), welche im Grunde genommen 0.5 sind ausser am eingespannten Auflager.
- 5) Der Knoten wird zum Drehen freigesetzt und rotiert durch das erzeugte «unbalanced moment». Das «unbalanced moments» wird mittels Verteilungsfaktor 0.5 auf die benachbarten Knoten verteilt.
- 6) Dieser Prozess wird nun iteriert bis kaum noch welche Momente übertragen und verteilt werden - Anschliessend werden alle Drehmomente an einem bestimmten Knoten zusammennaddiert.

In der folgenden Grafik haben wir die Anfangssituation mit einem Träger mit drei Stützen, dessen Auflagern aus zwei Loslager und einem Festlager bestehen:

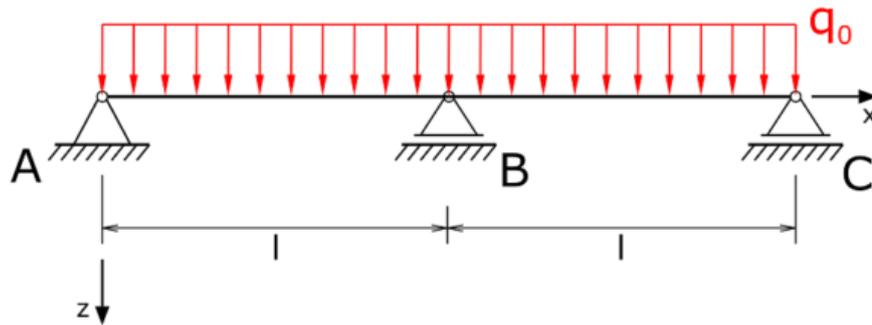


Abb. 58: Gleichmässige Last auf einem Zweifeldträger

Wir beziehen uns bei der Grafik auf die Capellinibrücke (5) mit drei Holzstützen und einer Festlager-Loslager-Loslager-Kombination. Dabei beträgt die Gesamtlänge $l = 24 \text{ cm}$, die Breite $b = 12 \text{ cm}$ und die Höhe $h = 0.1 \text{ cm}$. Die maximale Traglast entspricht 13.75 kg , was bei dieser Länge eine Streckenlast q_0 von ca. 562 N/m entspricht. Somit sind die wichtigsten Werte geklärt und wir können uns der Berechnung widmen.

1) Im nächsten Schritt blockieren wir alle Knoten (A, B, C) und man erhält einen Träger mit festen Einspannungen, wie in der folgenden Abbildung eines dieser Felder (Abb. 59) illustriert wird:

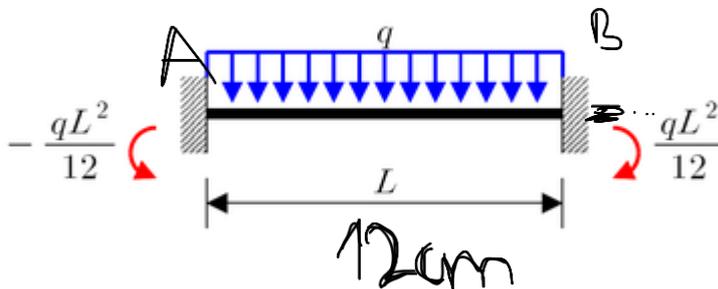


Abb. 59: Doppelt eingespannter Träger (mit eigenen Ergänzungen)

2) An diesem Balken berechnen wir die Ausgangsmomente bzw. Einspannmomente an allen Knoten mit Beachtung der Vorzeichen für Drehmomente. Das bedeutet, dass nach rechtsdrehende Momente positiv und nach linksdrehende Momente negativ sind:

$$M_{AB} = -\frac{q_0 L^2}{12} = -0.6744 \text{ N} = -\mathbf{0.675 \text{ N}}$$

$$M_{BA} = +\frac{q_0 L^2}{12} = +0.6744 \text{ N} = +\mathbf{0.675 \text{ N}}$$

$$M_{BC} = -\frac{q_0 L^2}{12} = -0.6744 \text{ N} = -\mathbf{0.675 \text{ N}}$$

$$M_{CB} = +\frac{q_0 L^2}{12} = +0.6744 \text{ N} = +\mathbf{0.675 \text{ N}}$$

Wir können mit der Momentgleichgewichtsbedingung überprüfen, ob bis jetzt alles richtig gerechnet wurde:

$$\sum M = M_{AB} + M_{BA} + M_{BC} + M_{CB} = -0.675 N + 0.675 N - 0.675 N + 0.675 N = 0$$

Das Gleichgewicht ist erfüllt!

3) Nun können wir die Biegesteifigkeiten und Verteilungsfaktoren der jeweiligen Felder (AB, BC) bzw. Knoten (AB, BA, BC, CB) berechnen:

Um die Biegesteifigkeiten zu ermitteln, können wir einen Trick anwenden. Erstmals wissen wir, dass $E \cdot I$ konstant ist. Auch ist bekannt, dass die Biegesteifigkeit an einer festen Einspannung I/L beträgt. Da es sich hier um rollende bzw. feste («pinned») Stützen handelt, fügen wir einen Faktor $\frac{3}{4}$ hinzu, um das korrekte Ergebnis zu erhalten. Somit erhalten wir für alle Knoten dieselbe Biegesteifigkeiten:

$$K_{AB} = K_{BA} = K_{BC} = K_{CB} = \frac{3 I}{4 L}$$

Schliesslich kann man die Verteilungsfaktoren («distributed factors») berechnen:

$$DF_{AB} = \frac{\frac{3 I}{4 L}}{\frac{3 I}{4 L}} = 1$$

$$DF_{BA} = \frac{\frac{3 I}{4 L}}{\frac{3 I}{4 L} + \frac{3 I}{4 L}} = 0.5$$

$$DF_{BC} = \frac{\frac{3 I}{4 L}}{\frac{3 I}{4 L} + \frac{3 I}{4 L}} = 0.5$$

$$DF_{CB} = \frac{\frac{3 I}{4 L}}{\frac{3 I}{4 L}} = 1$$

4) Die Bestimmung der Übertragungsfaktoren («carry-over-factors») ist am einfachsten, da sie überall 0.5 betragen ausser an festen Einspannungen.

5) Nun können wir alle Werte in eine Tabelle eintragen und den Iterationsprozess beginnen:

Cross- Verfahren								
	Knoten	A		Knoten	B		Knoten	C
DF	0	1		0.5	0.5		1	0
FEM		-0.675		+0.675	-0.675		+0.675	
1. Step		+0.675	→	+0.3375	-0.3375	←	-0.675	
+								
$\sum M$ (Nm)		0		+1.0125	-1.0125		0	
DIR V (N)		33.72↑		33.72↑	33.72↑		33.72↑	
AUX V (N)		8.4375↓		8.4375↑	8.4375↑		8.4375↓	
+								
TOT V (N)		25.1825↑		42.0575↑	42.0575↑		25.1825↑	
Reaction (N)		25.1825		84.115			25.1825	

In den grauen Feldern sind die bekannten Werte wie die **Verteilungsfaktoren (DF)** und die **Einspannmomente bzw. fix-end-moments (FEM)**. Die Pfeile (\rightarrow, \leftarrow) geben die Übertragungsfaktoren an, welche alle 0.5 sind.

Im ersten Schritt stellen wir uns vor, dass die feste Einspannung im Auflager bzw. Knoten A gelöst wird und dadurch eine Drehung stattfindet durch ein Biegemoment. Dieses wird «unbalanced moment» genannt und mit dem Übertragungsfaktor 0.5 auf den Knoten B übertragen. Das Gleiche wird auch beim Auflager C ausgeführt und auch dort entsteht ein «unbalanced moment», welches mit dem Faktor 0.5 auf den Knoten B übertragen wird. Das Vorzeichen muss so gewählt werden, dass sowohl am Knoten A als auch am Knoten B ein Momentgleichgewicht herrscht. Schliesslich können wir an jedem Knoten alle Momente am jeweiligen Auflager addieren und erhalten die Summe für jeden Knoten. Somit haben wir die Momente bestimmt, welche in der Tabelle mit gelb markiert sind.

Um die totale Querkraft (TOT V) zu berechnen, müssen wir erstmals DIR V und AUX V ermitteln. Dabei ist DIR V der Teil der Querkraft, der durch die Streckenlast entsteht und AUX V die Querkraft, welche durch die entstehenden Biegemomente induziert wird.

Für die Berechnung von DIR V stellt man sich das Feld AB und BC getrennt vom ganzen Träger vor mit der entsprechenden halben Streckenlast bzw. Länge. Mit DIR V wird hier nichts anderes als die Auflagerkraft gemeint. Deshalb berechnet man mit den Angaben, wie bereits gewohnt, die Auflagerkraft am Knoten A und B bzw. B und C. Da diese Kräfte nach oben zeigen, sind sie positiv, was auch der nach oben gerichteter Pfeil signalisiert (\uparrow).

Für die Berechnung von AUX V machen wir uns die Summe der Biegemomente zu Nutzen. Dabei stellt man sich die gleiche Situation wie bei DIR V vor. Man addiert die Summe der Momente an beiden Knoten jeweils bei den Feldern AB und BC und dividiert das mit der Länge des entsprechenden Feldes. Am Beispiel vom Feld AB addiert man die Momente 0 und 1.0125 Nm und dividiert das durch die Länge des Feldes AB = 0.12 m. So erhält man die 8.4375 N.

Die **Beachtung der Vorzeichen** ist hier wichtig, da diese Teilquerkräfte durch Drehmomente entstehen: Bei einem positiven Drehmoment (wie links am Knoten B) dreht es im Uhrzeigersinn und links vom Knoten ist es dementsprechend positiv und rechts negativ. Bei einem negativen Drehmoment (wie rechts am Knoten B) dreht es im Gegenuhrzeigersinn und links vom Knoten ist es dementsprechend negativ und rechts positiv. Für die richtigen Vorzeichen muss man das Vorzeichen der Summe des Moments kehren. Das heisst, dass man -1.0125 nimmt anstatt +1.0125. Die Pfeile symbolisieren, ob es sich um eine negative Richtung (↓) oder positive Richtung (↑) handelt.

Schliesslich erhält man die totale Querkraft TOT V mit der Summe von DIR V und AUX V. Somit haben wir auch die Querkräfte, welche blau markiert sind in der Tabelle, bestimmt.

Die Auflagerkräfte, welche grün markiert sind, ergeben sich durch die Addition der Querkräfte an jedem Knoten.

Im nächsten Schritt können wir noch die entsprechende Schub- bzw. Biegespannung der maximalen Querkraft bzw. des maximalen Biegemoments bestimmen. Dies führen wir genau gleich wie beim Einfeldträger aus. Dabei ist die Querschnittsfläche dieselbe, aber die Querkraft anders:

$$\tau_{max} = \frac{V_{max}}{A} = \frac{42.0575N}{0.00012 m^2} = 350'479 Pa \approx \mathbf{350 kPa}$$

Die Biegespannung lässt sich auch mit der gleichen Formel ermitteln, wobei alle Werte bis auf das maximale Biegemoment identisch sind:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} * z}{I_y} = \frac{M_{max} * \frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{1.0125 Nm * \frac{0.001m}{2}}{\frac{0.12m * 10^{-9}m^3}{12}} = 50'625'000 Pa$$

Die maximale Biegespannung beträgt ca. **50.6 MPa**.

Nun konnten wir sehen, dass wir mit Hilfe des Cross-Verfahrens die wichtigsten Schnittgrössen simpel bestimmen konnten, indem wir schrittweise der Anleitung gefolgt sind.

Auch hier habe ich alle Werte tabellarisch dargestellt und sie noch an anderen Stellen ausgewertet. Auf der nächsten Seite findet man die Grafik.

	Stelle der Auswertung			
	x = 0 cm	links von der mittleren Stütze	rechts von der mittleren Stütze	x = 24 cm
Auflagerkraft	25.1825 N	84.115 N		25.1825 N
Querkraft V	25.1825 N	42.0575 N	42.0575 N	25.1825 N
Biegemoment M	0 Nm	1.0125 Nm	-1.0125 Nm	0 Nm
Biegespannung σ	0 Pa	50.625 MPa	50.625 MPa	0 Pa
Scherspannung τ	209 kPa	350.479 kPa	350.479 kPa	209 kPa

In der unteren Tabelle sind noch die gerundeten Werte:

	Stelle der Auswertung			
	x = 0 cm	links von der mittleren Stütze	rechts von der mittleren Stütze	x = 24 cm
Auflagerkraft	30 N	80 N		30 N
Querkraft V	30 N	-40 N	40 N	30 N
Biegemoment M	0 Nm	1 Nm	-1 Nm	0 Nm
Biegespannung σ	0 Pa	51 MPa	51 MPa	0 Pa
Scherspannung τ	210 kPa	350 kPa	350 kPa	210 kPa

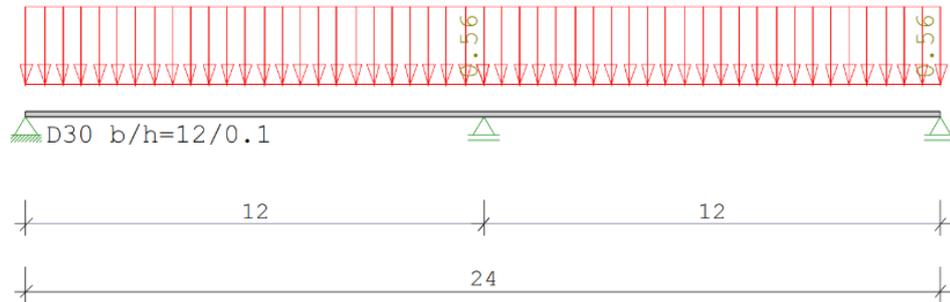
Berechnung mit Hilfe des Statik-Programms, also FEM:

Wie bei der Brücke mit zwei Stützen, schauen wir uns auf der nächsten Seite die Werte des Statik-Programms an. Erneut sind nur die wichtigsten Ausschnitte davon zu sehen:

Auch hier sind alle für uns nicht relevanten Ergebnisse mit **roter Farbe** weggestrichen.

Träger mit drei Stützen

Maßstab 1 : 2



Holzträger über 2 Felder D30
Mit Schubverformung gerechnet: $G = 600 \text{ N/mm}^2$

System	Länge	Querschnittswerte			
Feld	L (m)		b (cm)	h (cm)	I_y (cm ⁴)
1	0.12	konstant	12.0	0.1	0.0
2	0.12	konstant	12.0	0.1	0.0

Belastung (kN,m)	Lasttyp:	1=Gleichlast über L		2=Einzellast bei a		3=Einzelmoment bei a		4=Trapezlast von a - a+b		5=Dreieckslast über L		6=Trapezlast über L	
		Feld	Typ	EG	Gr	$g_{l/r}$	$q_{l/r}$	Faktor	Abstand	Länge	ausPOS	Phi	
1	1	A		0.00	0.56	1.00							
2	1	A		0.00	0.56	1.00							

Auflagerkräfte/Biegemomente/Querkräfte

Auflagerkräfte (kN)						
Stütze	aus g	max q	min q	Vollast	max	min
1	0.00	0.03	0.00	0.03	0.03	0.00
2	0.00	0.08	0.00	0.08	0.08	0.00
3	0.00	0.03	0.00	0.03	0.03	0.00
Summe:	0.00	0.14	-0.01	0.13	0.14	-0.01

Ergebnisse für 1-fache Lasten

Die Schnittgrößen sind mit Schubverformung gerechnet.

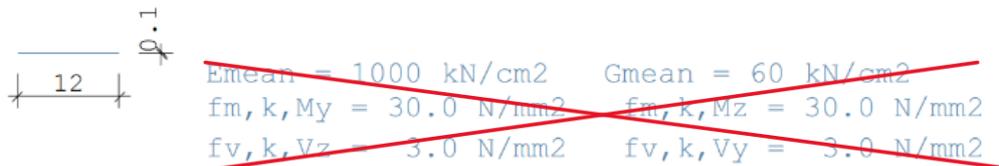
Feldmomente Maximum (kNm , kN)							
Feld		Mf	M li	M re	V li	V re	komb
1	x0 = 0.05	0.00	0.00	0.00	0.03	-0.04	2
2	x0 = 0.07	0.00	0.00	0.00	0.04	-0.03	3

Feldmomente Minimum (kNm , kN)							
Feld		Mf	M li	M re	V li	V re	komb
1	x0 = 0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1
2	x0 = 0.12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1

Stützmomente Maximum					(kNm , kN)		
Stütze	M li	M re	V li	V re	max F	min F	komb
1	0.00	0.00	0.00	0.03	0.03	0.00	2
2	0.00	0.00	-0.04	0.04	0.08	0.00	4
3	0.00	0.00	-0.03	0.00	0.03	0.00	3

Biegespannung und Schubspannung

Bemessung: DIN 1052:2008 D30
 Nutzungsklasse 1 $k_{def} = 0.60$ $\gamma_M = 1.30$ $\gamma_M(A) = 1.00$



Spannungen mit FLBemHo901 gerechnet. (Version 9.0.4.8)
~~Normalspannungen $b/h = 12/0.1$~~

Der Druckgurt ist nur an den Auflagern gehalten.

Feld Nr.	x (m)	$M_{y,d}$ (kNm)	$\sigma_{d,o}$ (N/mm ²)	$\sigma_{d,u}$ (N/mm ²)	k_m	k_{mod}	$\sigma_d/f_{m,d}$	komb
1	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1
	0.05	0.00	-57.67	57.67	1.00	0.80	3.12!	A 2
	0.06	0.00	-57.84	57.84	1.00	0.80	3.13!	A 2
	0.12	0.00	75.71	-75.71	1.00	0.80	4.10!	A 4
2	0.00	0.00	75.71	-75.71	1.00	0.80	4.10!	A 4
	0.07	0.00	-57.46	57.46	1.00	0.80	3.11!	A 3
	0.12	0.00	0.00	0.00	1.00	0.80	0.00	A 3

Schubspannungen $b/h = 12/0.1$

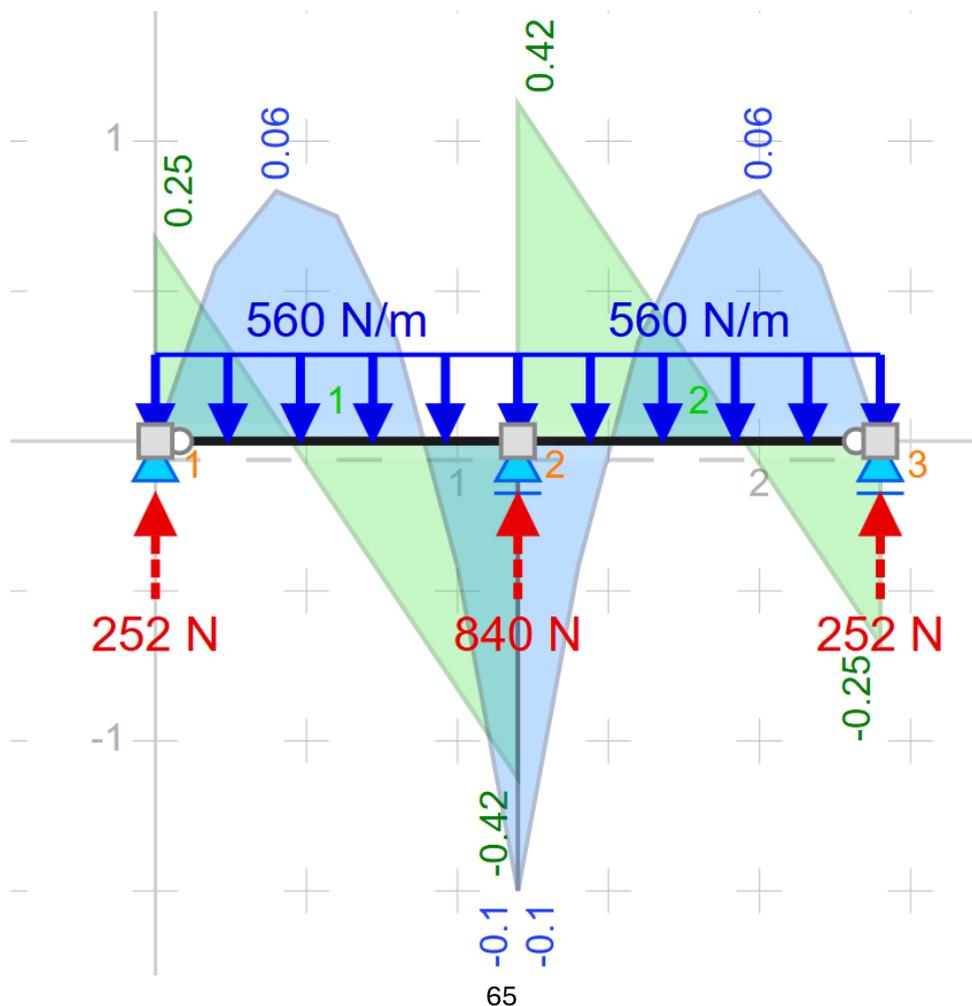
Stütze Nr.	x (m)	$V_{z,d}$ (kN)	τ_D (N/mm ²)	k_{mod}	$\tau_d/f_{v,d}$	komb
1 re	0.001	0.04	0.54	0.80	0.29	A 2
2 li	0.001	-0.06	0.78	0.80	0.42	A 4
	re	0.001	0.06	0.78	0.80	0.42
3 li	0.001	-0.04	0.54	0.80	0.29	A 3

Auf der nächsten Seite habe ich nochmals alle wichtigen Werte des Statik-Programms in einer Tabelle zusammengefasst und die Einheiten angepasst:

	Stelle der Auswertung			
	x = 0 cm	links von der mittleren Stütze	rechts von der mittleren Stütze	x = 24 cm
Auflagerkraft	30 N	80 N		30 N
Querkraft V	30 N	-40 N	40 N	-30 N
Biegemoment M	0 Nm	-1 Nm	-1 Nm	0 Nm
Biegespannung σ	0 Pa	50 MPa	50 MPa	0 Pa
Scherspannung τ	240 kPa	350 kPa	350 kPa	240 kPa

Bemerkung: Bei der Schubspannung wurde der Sicherheitsfaktor gleich zweimal verrechnet. Einmal bei der Querkraft, welche die Scherspannung induziert, und einmal bei der Schubspannung selbst. Alle Werte des Programms sind gerundete Werte (Spannungen habe ich gerundet). Da das Programm den Wert 0 für das Biegemoment angegeben hat, da die Größe zu klein ist, habe ich es mit der Biegespannung ausgerechnet. Die Vorzeichen habe ich mit Hilfe des anderen Programms angepasst, da die Achse bei Frilo in die andere Richtung definiert war.

Mit diesem anderen Programm habe ich erneut den Moment- und Querkraftverlauf modelliert, welcher die tabellarischen Werte illustrieren soll:



Auch hier ist die **blaue Kurve** der **Momentverlauf (M-x)** und die **grüne Kurve** der **Querkraftverlauf (V-x)**. Die **roten Pfeile** stehen für die **Auflagerkräfte** an den Stützen. Beide Kurven sind mit den Maximalwerten beschriftet, welche in kN angegeben sind. Die Kurven habe ich mit einem gewissen Faktor skaliert, damit man alle Zahlen ablesen kann. Die Länge des Trägers auf der Darstellung ist 2.4 m, was bedeutet, dass das Biegemoment 100 mal und die Querkraft sowie die Auflagerkraft 10 mal grösser sind als bei unserem Träger mit einer Länge von 0.24 m. Das maximale Biegemoment sowie die maximale Querkraft liegt auf der mittleren Stütze, wie von der Grafik herauslesen kann.

Man kann hier die gleiche Erkenntnis ziehen wie bei den Ergebnissen des Einfeldträgers:

→ Auch hier liefern beide Programme dieselben Werte für die Schnittgrößen und Auflagerkräfte.

4. Diskussion

Unter dem Abschnitt der Diskussion werden die Resultate genauer analysiert und die Brücken miteinander sowie mit dem Statik-Programm bzw. mit der Theorie verglichen. Schliesslich werden die entstandenen Abweichungen erklärt bzw. interpretiert.

4.1 Vergleich: Statik-Programm und Handrechnung

Zuerst schauen wir uns den Vergleich des Statik-Programms mit den eigenen Handrechnungen an. Damit wir einen guten Vergleich machen können, müssen wir die prozentualen Abweichungen betrachten. Da die meisten Werte des Statik-Programms gerundet sind, hilft es, wenn die Resultate der Handrechnungen auf dieselbe signifikante Stelle gerundet werden.

4.1.1 Vergleich des Einfeldträgers

Nun betrachten wir uns erstmal die prozentualen Abweichungen des Einfeldträgers:

Diese Tabelle zeigt die gerundeten Werte der Handrechnung:

	Stelle der Auswertung		
	x = 0 cm	x = 12 cm	x = 24 cm
Auflagerkraft	60 N	-	60 N
Querkraft V	60 N	0 N	-60 N
Biegemoment M	0 Nm	4 Nm	0 Nm
Biegespannung σ	0 Pa	177 MPa	0 Pa
Scherspannung τ	490 kPa	0 Pa	490 kPa

Diese Tabelle zeigt die Werte des Statik-Programms:

	Stelle der Auswertung		
	x = 0 cm	x = 12 cm	x = 24 cm
Auflagerkraft	60 N	-	60 N
Querkraft V	60 N	0 N	-60 N
Biegemoment M	0 Nm	4 Nm	0 Nm
Biegespannung σ	0 Pa	177 MPa	0 Pa
Scherspannung τ	490 kPa	0 Pa	490 kPa

Das Verhältnis in Prozent dieser beiden Tabellen liefert uns folgendes:

	Stelle der Auswertung		
	x = 0 cm	x = 12 cm	x = 24 cm
Auflagerkraft	100%	100%	100%
Querkraft V	100%	100%	100%
Biegemoment M	100%	100%	100%
Biegespannung σ	100%	100%	100%
Scherspannung τ	100%	100%	100%

→ Wie erwartet stimmen alle Werte des Statik-Programms mit denen der Handrechnungen zu 100% überein.

4.1.2 Vergleich des Zweifeldträgers

Schliesslich betrachten wir uns die prozentualen Abweichungen des Zweifeldträgers:

Diese Tabelle zeigt die gerundeten Werte der Handrechnung:

	Stelle der Auswertung			
	x = 0 cm	links von der mittleren Stütze	rechts von der mittleren Stütze	x = 24 cm
Auflagerkraft	30 N	80 N		30 N
Querkraft V	30 N	-40 N	40 N	30 N
Biegemoment M	0 Nm	1 Nm	-1 Nm	0 Nm
Biegespannung σ	0 Pa	51 MPa	51 MPa	0 Pa
Scherspannung τ	210 kPa	350 kPa	350 kPa	210 kPa

Diese Tabelle zeigt die Werte des Statik-Programms:

	Stelle der Auswertung			
	x = 0 cm	links von der mittleren Stütze	rechts von der mittleren Stütze	x = 24 cm
Auflagerkraft	30 N	80 N		30 N
Querkraft V	30 N	-40 N	40 N	-30 N
Biegemoment M	0 Nm	-1 Nm	-1 Nm	0 Nm
Biegespannung σ	0 Pa	50 MPa	50 MPa	0 Pa
Scherspannung τ	240 kPa	350 kPa	350 kPa	240 kPa

Das Verhältnis in Prozent dieser beiden Tabellen liefert uns folgendes:

	Stelle der Auswertung			
	x = 0 cm	links von der mittleren Stütze	rechts von der mittleren Stütze	x = 24 cm
Auflagerkraft	100%	100%		100%
Querkraft V	100%	100%	100%	100%
Biegemoment M	100%	100%	100%	100%
Biegespannung σ	100%	102%	102%	100%
Scherspannung τ	87.5%	100%	100%	87.5%

→ Wie erwartet stimmen alle Werte des Statik-Programms mit denen der Handrechnungen zu 100% überein. Bei der Schubspannung kam es an den Auswertungsstellen x = 0 cm und x = 24 cm zu einer grösseren Abweichung, was wahrscheinlich am Runden liegt. Dasselbe gilt für die winzige Abweichung der Biegespannung mit 102 %.

→Somit können wir den Entschluss ziehen, dass man mit unkomplizierten Rechnungen die wichtigsten Grössen bei Brücken (Schnittkräfte und Spannungen) sehr präzise von Hand ermitteln kann.

4.2 Vergleich: Bruchstellen: Theorie und Praxis

Ein weiterer Aspekt, der sich betrachten lässt, ist der Vergleich der Bruchstellen in der Praxis und Theorie. Hierfür muss man sich anschauen, wo die höchste Biegespannung bzw. Schubspannung liegt. Am besten betrachten wir nochmals die Tabellen der Resultate nur mit den Angaben zu den Spannungen mit denen zu den Bruchstellen.

4.2.1 Bruchstellenvergleich des Einfeldträgers

Wir führen diesen Vergleich an der Brücke (6) durch, an welcher alle Berechnungen gemacht wurden, da dieser Brückenbau und die Belastung am nächsten der Theorie entsprechen:

	Stelle der Auswertung		
	x = 0 cm	x = 12 cm	x = 24 cm
Biegespannung σ	0 Pa	177 MPa	0 Pa
Scherspannung τ	490 kPa	0 Pa	490 kPa

Die maximal mögliche Zugspannung einer Spaghetti beträgt 30 MPa, welche man experimentell bestimmen kann (siehe [36]). Diese wird bei der Biegespannung mit 177 MPa an der Stelle $x = 12$ cm bei weitem überschritten, weswegen sie rot markiert wurde. Die Werte für die Schubspannung liegen demnach im grünen Bereich. Die Biegespannung ist ca. 6-mal grösser als die maximal erlaubte Spannung. Dort sollte auch die Bruchstelle meiner Brücke liegen. Deswegen schauen wir uns die nächste Tabelle an.

	Auflager	Gewicht (kg)	Last (kg)	Last/Gewicht	Bruchstelle
(6)	(1 FL + 1 LL)	0.040	12	300	klare Bruchlinie am Loslager

Obwohl die Biegespannung in der Mitte, also bei $x = 12$ cm, nach der Theorie am grössten ist, liegt die Bruchstelle in der praktischen Ausführung am Loslager, also bei ca. $x = 24$ cm. Dies steht im völligen Widerspruch zur Theorie, da die Biegespannung dort beinahe 0 Pa und die Schubspannung nur einen geringen Wert aufweist. Wie lässt sich dieser Unterschied erklären? Betrachten wir erstmals die Ergebnisse des Zweifeldträgers. Vielleicht kommen wir hier auf andere Resultate.

4.2.2 Bruchstellenvergleich des Zweifeldträgers

Hier führen wir den Vergleich an den beiden Brücken (4) und (5), da sie bis auf die Auflagerkombination identisch sind. Somit erhalten wir ein Ergebnis mit einer kräftigeren Aussage.

		Stelle der		Auswertung	
	$x = 0$ cm	links von der mittleren Stütze	rechts von der mittleren Stütze		$x = 24$ cm
Biegespannung σ	0 Pa	51 MPa	51 MPa		0 Pa
Scherspannung τ	210 kPa	350 kPa	350 kPa		210 kPa

Die maximale Zugspannung von 30 MPa einer Spaghetti wird bei der Biegespannung um die mittlere Stütze herum überschritten. Alle anderen Werte liegen deshalb im grünen Bereich. Das bedeutet, dass die Bruchstellen hier um die mittlere Stütze liegen sollen, um der Theorie zu entsprechen. Die Biegespannung ist hier 1.7-mal grösser als die maximal erlaubte Spannung. Beim Einfeldträger ist das Verhältnis deutlich höher.

	Auflager	Gewicht (kg)	Last (kg)	Last/Gewicht	Bruchstelle
(4)	(2 FL + 1 LL)	0.040	13.5	338	v.a am Loslager, aber auch in der mittleren Stütze beidseitig
(5)	(1 FL + 2 LL)	0.040	13.75	344	aussen am Loslager, z.T. mittig, aber nur einseitig

Bei der Brücke (4) liegt die Bruchstelle hauptsächlich am äusseren Loslager genauso wie beim Einfeldträger (6). Zusätzlich dazu sind auch Brüche an beiden Seiten der mittleren Stütze entstanden.

Bei der Brücke (5) liegt die Bruchstelle auch am äusseren Loslager. Diesmal jedoch kam es an der mittleren Stütze nur an der rechten Seite zu ein paar Brüchen. Somit erhalten wir für beide Träger mit zwei Stützen ähnliche Ergebnisse.

Nun können wir mehrere Schlüsse ziehen:

- 1) Die Biegespannung bei diesen Brücken liegt über der maximal möglichen Zugspannung einer Spaghetti. Beim Einfeldträger ist dieser Wert sogar viel grösser als beim Zweifeldträger.
- 2) Die Brücken haben nicht an der Stelle versagt, an der die Biegespannung am grössten ist. Die hauptsächlich Bruchstelle liegt sowohl beim Einfeldträger als auch beim Zweifeldträger am äusseren Loslager. Beim Zweifeldträger kam es an der mittleren Stütze (Biegespannung maximal) zu ein paar Brüchen
- 3) Trotz der Beobachtung 2) kam es beim Zweifeldträger auch zu einigen Brüchen an der mittleren Stütze, wo die Biegespannung maximal ist. Somit ist der Träger mit drei Stützen näher an der Theorie als beim Träger mit zwei Stützen.

4.2.3 Interpretation der Abweichungen

Wieso kommt es jedoch zu diesen Abweichungen und wie lässt sich das erklären? Hier unten sind alle möglichen Fehlerquellen, die zu Unterschieden geführt haben, aufgelistet. Bei jedem Grund wird dabei genannt auf welche dieser Beobachtungen es einen Einfluss hat:

1. Das Ideal der Balkentheorie: Wie wir bereits von der Balkentheorie wissen, trifft sie gewisse Annahmen (siehe Kap. 1.2.1), welche den Balken/Stab idealisieren, damit die Rechnungen genau werden. Das Problem hier ist, dass die Brücken nicht unbedingt diesen Annahmen entsprechen:

Beispielsweise soll die Länge des Balkens viel grösser sein als der Querschnitt. Bei uns ist die Länge nur doppelt so gross wie die Breite. Ein weiterer Punkt ist, dass die Biegeverformungen, welche auftreten, sehr gering im Verhältnis zur Länge des Balkens sein sollen. In diesem Aspekt trifft dies gar nicht auf unsere Brücken zu. Zusätzlich ist dieses Verhältnis beim Einfeldträger viel grösser als beim Zweifeldträger. Dies lässt vielleicht auch erklären, wieso das Verhältnis der Biegespannung (von der maximal erlaubten) des Einfeldträgers bei weitem höher ist als beim Zweifeldträger, da die Durchbiegung viel stärker war. Dies begründet auch, wieso es beim Zweifeldträger in der Mitte z. T. zu Brüchen kam, da es eher der Theorie entspricht. Der letzte Punkt von den Annahmen, welcher hier ein Einfluss auf die Abweichungen haben könnte, ist, dass ein Balken als homogen und isotrop betrachtet wird und somit dem Hookeschen Gesetz folgt. Das Material von Spaghetti bzw. Capellini ist im trockenen Zustand eher spröde, was dazu führt, dass es keinen richtigen elastisch-linearen Verformungsbereich hat.

→All diese Gründe, aufgeführt unter dem Punkt der Bernoullischen Annahmen, spielen eine grosse Rolle bei der Erklärung der Abweichungen dieser Beobachtungen.

2. Realisierung eines Loslagers in der Praxis: In der Theorie erfüllt das Loslager bestimmte physikalische Eigenschaften, wie dass es die Verschiebung senkrecht zur Bewegungsbahn sperrt (siehe Kap. 1.3.1). In der Realität ist es jedoch schwierig ein perfektes Loslager zu realisieren, sodass beispielsweise eine Verschiebung senkrecht zur Bewegungsbahn nicht ausgeschlossen werden kann oder es zu weiteren ungewollten Effekten kommt. In meinem Fall kam es zu einer starken Drehung des Loslagers nach aussen. Dies führte, dass die Capellini zu stark belastet wurden und aufgrund des spröden Verhaltens nahe an diesem Loslager gebrochen sind. Auf dem folgenden Bild lässt sich das wunderbar zeigen:

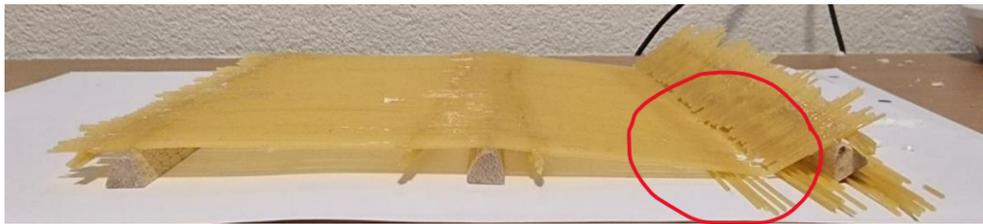


Abb. 60: Bruchstelle am Loslager der Capellinibrücke

Obwohl dies ein Bild von einer anderen Brücke ist, kann man die Situation auch auf die Brücken (4), (5) und (6) übertragen.

Dies erklärt, wieso die Bruchstellen hauptsächlich am äusseren Loslager sind.

3. Dicke der Stützen: Auch bei den Stützen entspricht es nicht der Theorie, da sie eine gewisse Dicke haben, obschon dies für die Praxis vorteilhaft ist, um den Träger daran zu kleben. Dies kann einen Einfluss auf die Stabilität des Trägers haben und so die maximal ertragbare Biegespannung erhöhen. Dies erklärt vielleicht, wieso die Biegespannung höher ist als die maximal zugelassene Spannung von Spaghetti. Auch gewährt es dem Zweifeldträger möglicherweise eine zusätzliche Stabilität in der Mitte der Brücke.

4. Leim: Auch beim Gebrauch der Leim kann es zu Fehlerquellen gekommen sein, wie beispielsweise, dass die Capellini durch die Feuchtigkeitsaufnahme empfindlicher gegenüber Belastungen geworden sind. Da die Brücken an den Stützen beklebt wurden, hat dies vielleicht bewirkt, dass sie dort am stärksten von diesem Effekt betroffen wurden. Deshalb könnten die Bruchstellen vor allem in Stützennähe liegen und nicht in der Mitte des Trägers.

5. Kein einziger durchgehender Träger: In der Theorie ist es ein Träger, welcher nicht aus einzelnen Elementen besteht, sondern durchgehend ist, was auch hier trotz des Beklebens des Leims nicht der Fall ist. Dies ist erneut ein grosser Unterschied zur Theorie und eine mögliche Fehlerquelle.

6. Art der Belastung: Wir sind in der Theorie von einer gleichmässigen Last ausgegangen, welche durchgehend auf dem Träger während des ganzen Verbiegungsprozess wirkt. In der Praxis ist die Realisation einer solchen gleichmässigen Last wie beim Loslager nur beschränkt möglich. Das wird bei uns erschwert durch die starke Durchbiegung der Brücke, welche eine Massenverschiebung nach aussen bewirkt. Obwohl ich dies befürchtet und deshalb jeweils in der Mitte von zwei Stützen einen höheren Münzstapel für die Belastung errichtet habe, konnte das nicht der starken Verformung entgegenwirken. Das hat dazu geführt, dass die Last einen grösseren «Druck» in der Nähe von den Stützen ausgeübt hat und es deshalb dort zu den Bruchstellen kam. Die folgende Abbildung soll dies nochmals verdeutlichen:

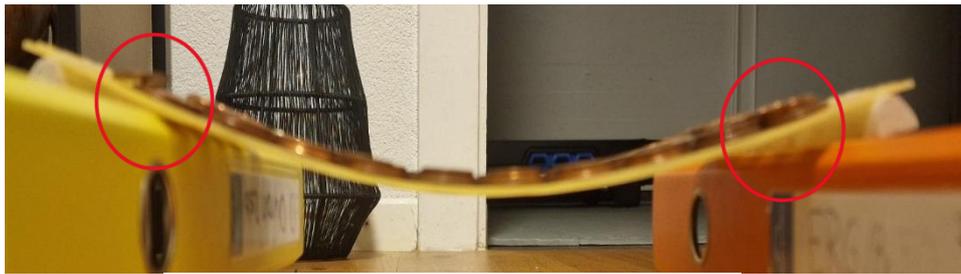


Abb. 61. Biegung der Capellinibücke (6)

Die **roten Kreise** zeigen, wo der Grossteil der Last auf dem Träger eine Kraft wirken wird. Ganz rechts kann man das Problem mit der Drehung des Loslagers, welches unter 2. beschrieben wird, leicht erkennen.

Dieses Problem mit der durchgehend gleichmässigen Last spielt eine grosse Rolle in der Erklärung der Bruchstellen.

Die kommenden Gründe beziehen sich vor allem auf Ungenauigkeiten, welche bei der Bestimmung der maximal tragbaren Last oder der geometrischen Annäherung der Form des Trägers entstanden sind.

7. Bestimmung der Last: Beim Belasten ist es nicht einfach, die genaue Last bzw. Masse zu ermitteln, bei der die Brücke bricht. So kann es schnell vorkommen, dass die Streckenlast grösser ist, als sie sein sollte.

8. Annäherung der Geometrie: Für das Flächenträgheitsmoment haben wir den Träger der Brücke als Quader angenähert, obwohl die Form mit den Wölbungen der einzelnen Capellini deutlich komplizierter ist.

9. Messfehler: Auch könnten mir kleine Messfehler unterlaufen sein, sodass der Träger in Wirklichkeit vielleicht kleiner als 24 cm wäre, wobei ich das als Fehlerquelle ausschliesse, da ich grossen Wert auf eine sorgfältige Arbeitsweise gelegt habe.

Mit der Auflistung der Fehlerquellen lassen sich die Abweichungen in einem gewissen Grad erklären.

4.3 Vergleich: Belastbarkeit: Fachwerkbrücke und Träger mit drei Stützen

Nachdem wir meine eigenen Rechnungen mit dem Statik-Programm und die Ergebnisse von den Bruchstellen vom Einfeld- /Zweifeldträger mit der Theorie verglichen haben, fehlt noch die Analyse von der Fachwerkbrücke. Deshalb schauen wir uns die Unterschiede in der Belastbarkeit zwischen der Fachwerkbrücke und dem Träger mit drei Stützen genauer an.

Wie wir bereits wissen, beträgt das Verhältnis zwischen Last und Eigengewicht (ohne Stützen) beim Zweifeldträger ca. 340 und bei der Fachwerkbrücke 370. Das heisst, dass sich die Fachwerkbrücke mit einem ungefähren Faktor von 1.09 verbessert hat. Dies ist erstaunlich wenig und verfehlt meine Erwartungen. Weshalb aber ist dieser Faktor nicht grösser? Betrachten wir für die Beantwortung dieser Fragestellung erneut die Bruchstellen der Fachwerkbrücke:

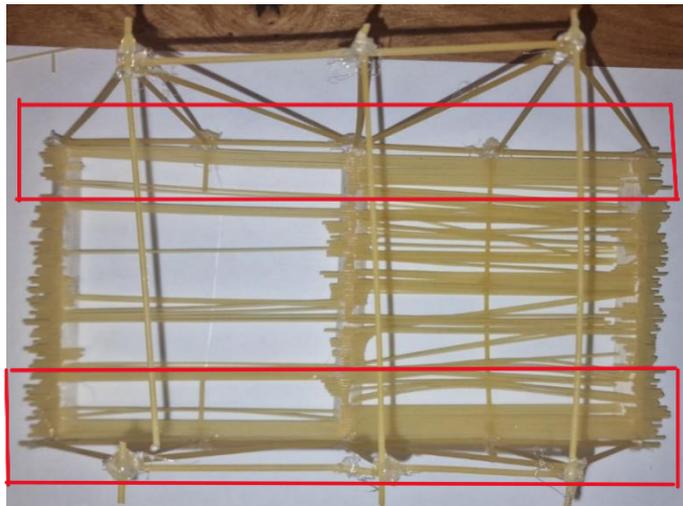


Abb. 62: Bruchstellen der Fachwerkbrücke

Man kann schön erkennen, dass die Capellini ganz aussen (in Rot umrandet) keinerlei Brüche aufweisen. Das deutet darauf hin, dass das Fachwerk für eine gewisse Stabilität beim Träger gesorgt hat. Jedoch hat dies nicht für die mittleren Capellini ausgereicht. Der Grund hierfür liegt in der Breite des Balkens. Wie wir bereits im vorherigen Abschnitt sehen konnten, muss der Balken schlank sein wegen der Balkentheorie, was bei der Fachwerkbrücke wie bei den anderen auch nicht der Fall ist. Deswegen ist der Effekt des Fachwerks nicht so gross und das Verhältnis (Last zu Eigengewicht) dementsprechend nicht viel höher als beim Zweifeldträger.

Normalerweise sind Fachwerkbrücken viel stabiler als Brücken ohne Fachwerk, was an folgender Erklärung liegt:

Die Fachwerke bestehen oft aus Dreiecken, welche mit dem Träger verbunden sind. Sie dienen als Verstärkung der Brücke und sorgen dafür, dass die Last gleichmäßig über die gesamte Struktur verteilt wird. Zusätzlich leitet das Fachwerk die Last so durch die Struktur, dass die Mitte des Balkens weniger Druck und Spannung erfährt.

Wie bereits vorhin erwähnt, liegt das Problem bei meiner Brücke an der Breite, weshalb das Fachwerk es nicht geschafft hat, die gesamte Last so durch die Struktur zu leiten, dass die Mitte weniger Spannung ausgesetzt ist. Es lassen sich jedoch ein paar Massnahmen vornehmen, um das Verhältnis Last/Eigengewicht zu verbessern:

1) Die eine Möglichkeit wurde bereits öfters genannt und ist naheliegend, nämlich die Anpassung der Breite. Macht man die Brücke schmaler, so senkt man einerseits das Eigengewicht und andererseits kann das Fachwerk eine bessere Arbeit erfüllen. Somit kann man das Verhältnis leicht erhöhen.

2) Eine weitere Möglichkeit ist, dass man ein drittes Fachwerk in der Mitte des Trägers baut und so die anfälligste Stelle stabilisiert. Dies hat den Vorteil, dass man die Breite der Brücke nicht verändern muss. Auch dies erhöht das Verhältnis beträchtlich.

3) Die letzte Möglichkeit ist, ein stärkeres Material für das Fachwerk zu verwenden, welches ungefähr dieselbe Dichte hat, was eine höhere Last bei gleichbleibendem Eigengewicht erlauben würde.

→ Kombiniert man schliesslich all diese Methoden, erhält man die grösste Verbesserung des Verhältnisses von Last zu Eigengewicht!

5. Fazit

Die Arbeit hat gezeigt, dass die theoretischen Berechnungen in vielen Fällen erstaunlich gut mit den Ergebnissen des Statik-Programms übereinstimmen. Insbesondere die Berechnung von Querkraft, Biegemoment und Schub- bzw. Biegespannung. Dennoch gab es Abweichungen zwischen Theorie und Praxis, welche für unterschiedliche Resultate bei den Bruchstellen ergaben. Diese Unterschiede zeigen, dass theoretische Modelle oft idealisierte Bedingungen voraussetzen, während in der Praxis komplexere Einflüsse eine Rolle spielen. Besonders deutlich wurde dies bei der Fachwerkbrücke, die theoretisch viel stabiler sein sollte, als sie schlussendlich in der Praxis war.

Ich konnte im Rahmen dieser Arbeit Vieles lernen und auch Einiges für mich mitnehmen. Einerseits habe ich mein Wissen über Brücken immens erweitert und habe mich zum ersten Mal allein vertieft in ein neues Gebiet der Physik hineingearbeitet. Andererseits forderte die Arbeit an diesem Projekt viel Selbstverantwortung, Disziplin und vor allem Zeitmanagement, was jedoch eine gute Vorbereitung für die Zukunft ist. Am Ende hat diese Arbeit meine analytischen Fähigkeiten gestärkt und mir die Bedeutung kleiner Details für den Erfolg eines größeren Projekts vor Augen geführt.

Redlichkeitserklärung

Die Arbeit wurde selbstständig von dem unten angegebenen Autor verfasst. Er bestätigt mit seiner Unterschrift, dass sein Werk kein Plagiat ist und dass alle verwendeten Hilfsmittel angegeben worden sind.

Schaffhausen, 03.12.24

Duran Veseloski



6. Literaturverzeichnis

- [1] ETH Zürich: Belastungsarten. Bearbeitungsstand: 0.1.01.2017.
URL: https://block.arch.ethz.ch/eq/files/Figur%204_Belastungsarten_1475680157.pdf (abgerufen am 2.12.2024)
- [2] Universität Siegen: Schnittgrößen und Vorzeichenkonvention. Bearbeitungsstand: 2022.
URL: <https://www.bau.uni-siegen.de/subdomains/bauinformatik/lehre/tm1/arbeitsblaetter/balkenrahmenbogen-i.pdf> (abgerufen am 2.12.2024)
- [3] Wikipedia – Die freie Enzyklopädie: Querkraft. Bearbeitungsstand: 12. Juni 2024. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Querkraft&oldid=245862660> (abgerufen am 2.12.2024)
- [4] Wikipedia – Die freie Enzyklopädie: Biegemoment. Bearbeitungsstand: 30. Juli 2024. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Biegemoment&oldid=247230310> (abgerufen am 2.12.2024)
- [5] Studyflix: Biegung. Bearbeitungsstand: 2018. URL: <https://studyflix.de/ingenieurwissenschaften/biegung-1098> (abgerufen am 2.12.2024)
- [6] Wikipedia – Die freie Enzyklopädie: Trägheitsmoment. Bearbeitungsstand: 22. Oktober 2024. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Fl%C3%A4chenmoment&oldid=249640937> (abgerufen am 2.12.2024)
- [7] Wikipedia – Die freie Enzyklopädie: Mechanische Spannung. Bearbeitungsstand: 17. Juli 2024. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Mechanische_Spannung&oldid=246836849 (abgerufen am 2.12.2024)
- [8] Studyflix: Mechanische Spannung. Bearbeitungsstand: 2018. URL <https://studyflix.de/ingenieurwissenschaften/mechanische-spannungen-1060> (abgerufen am 2.12.2024)
- [9] ScienceDirect: Bending Load. Bearbeitungsstand: 2012. URL: <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/bending-load> (abgerufen am 2.12.2024)
- [10] StudySmarter: Biegespannung. Bearbeitungsstand: (o. J.). URL: <https://www.studysmarter.de/studium/ingenieurwissenschaften/technische-mechanik/biegespannung> (abgerufen am 2.12.2024)
- [11] Wikipedia – Die freie Enzyklopädie: Dehnung. Bearbeitungsstand: 12. August 2024. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Dehnung&oldid=247649274> (abgerufen am 2.12.2024)
- [12] Kendall, Jack - ETH Zürich: Dehnung und Verzerrung. Bearbeitungsstand: 01.01.2017.
URL: https://n.ethz.ch/~kendallj/download/mechanik2/04_DehnungVerzerrung.pdf (abgerufen am 2.12.2024)

- [13] Ingenieurkurse: Dehnungen im Stab. Bearbeitungsstand: (o. J.). URL: <https://www.ingenieurkurse.de/baustatik-1/verformungen/verformung-infolge-dehnung/dehnungen-im-stab.html> (abgerufen am 2.12.2024)
- [14] Wikipedia – Die freie Enzyklopädie: Elastizitätsmodul. Bearbeitungsstand: 8. Oktober 2024. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Elastizit%C3%A4tsmodul&oldid=249260069> (abgerufen am 2.12.2024)
- [15] Wikipedia – Die freie Enzyklopädie: Hookesches Gesetz. Bearbeitungsstand: 24. April 2024. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Hookesches_Gesetz&oldid=244360153 (abgerufen am 2.12.2024)
- [16] Ingenieurkurse: Hookesches Gesetz. Bearbeitungsstand: (o. J.). URL: <https://www.ingenieurkurse.de/technische-mechanik-elastostatik/stabbeanspruchungen/materialgesetz/hookesches-gesetz.html> (abgerufen am 2.12.2024)
- [17] Wikipedia – Die freie Enzyklopädie: Durchbiegung. Bearbeitungsstand: 16. Juli 2024. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Durchbiegung&oldid=246819087> (abgerufen am 2.12.2024)
- [18] Wikipedia – The Free Encyclopedia: Deflection (engineering). Bearbeitungsstand: 25.01.2024. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Deflection_\(engineering\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Deflection_(engineering)) (abgerufen am 2.12.2024)
- [19] StudySmarter: Durchbiegung. Bearbeitungsstand: (o. J.). URL: <https://www.studysmarter.de/studium/architektur/statik-in-der-architektur/durchbiegung/> (abgerufen am 2.12.2024)
- [20] Wikipedia – Die freie Enzyklopädie: Balkentheorie. Bearbeitungsstand: 18. Juli 2024. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Balkentheorie&oldid=246854229> (abgerufen am 2.12.2024)
- [21] Ingenieurkurse: Normalenhypothese von Bernoulli. Bearbeitungsstand: (o. J.). URL: <https://www.ingenieurkurse.de/baustatik-1/verformungen/verformung-infolge-biegung/verformung-infolge-reiner-biegung/normalenhypothese-von-bernoulli.html> (abgerufen am 2.12.2024)
- [22] Wikipedia – Die freie Enzyklopädie: Bernoullische Annahmen. Bearbeitungsstand: 14. November 2022. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Bernoullische_Annahmen&oldid=227975801 (abgerufen am 2.12.2024)
- [23] Studyflix: Balkentheorie. Bearbeitungsstand: 2018. URL: <https://studyflix.de/ingenieurwissenschaften/balkentheorie-1097> (abgerufen am 2.12.2024)
- [24] Ingenieurkurse: Spannung und Dehnung bei reiner Biegung. Bearbeitungsstand: (o. J.). URL: <https://www.ingenieurkurse.de/baustatik-1/verformungen/verformung-infolge-biegung/verformung-infolge-reiner-biegung/spannung-und-dehnung-bei-reiner-biegung.html> (abgerufen am 2.12.2024)

- [25] Frangi, Tullio und Hugi Hans: Baustatik. Statik der Tragwerke und Festigkeitslehre, Muttenz, Basel, 2002.
- [26] Wikipedia – Die freie Enzyklopädie: Einfeldträger. Bearbeitungsstand: 21. August 2023. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Einfeldtr%C3%A4ger&oldid=236613645> (abgerufen am 2.12.2024)
- [27] Studyflix: Lagerreaktionen. Bearbeitungsstand: ... URL: <https://studyflix.de/ingenieurwissenschaften/lagerreaktionen-i-190> (abgerufen am 2.12.2024)
- [28] Bochmann, Fritz: Statik im Bauwesen. Statisch bestimmte Systeme, Band 1, Bauwesen, Berlin, 2001.
- [29] Ingenieurkurse: Streckenlast: Schnittgrößen anhand der Gleichgewichtsbedingungen. Bearbeitungsstand: (o. J.). URL: <https://www.ingenieurkurse.de/technische-mechanik-statik/schnittmethode-und-schnittgroessen/schnittgroessen-linienfoermiger-tragwerke/schnittgroessen-am-balken/schnittgroessen-verteilte-lasten-am-balken/schnittgroessen-anhand-der-gleichgewichtsbedingungen.html> (abgerufen am 2.12.2024)
- [30] Wikipedia – Die freie Enzyklopädie: Cross-Verfahren. Bearbeitungsstand: 28. Oktober 2023. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Cross-Verfahren&oldid=238581920> (abgerufen am 2.12.2024)
- [31] Wikipedia – The Free Encyclopedia: Moment distribution method. Bearbeitungsstand: 28. Juli 2024. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Moment_distribution_method (abgerufen am 2.12.2024)
- [32] LibreTexts: Moment Distribution Method of Analysis of Structures. Bearbeitungsstand: 2. Januar 2020. URL: [https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Civil_Engineering/Structural_Analysis_\(Udoeyo\)/01%3A_Chapters/1.12%3A_Moment_Distribution_Method_of_Analysis_of_Structures](https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Civil_Engineering/Structural_Analysis_(Udoeyo)/01%3A_Chapters/1.12%3A_Moment_Distribution_Method_of_Analysis_of_Structures) (abgerufen am 2.12.2024)
- [33] Wikipedia – Die freie Enzyklopädie: Steifigkeit und Biegesteifigkeit. Bearbeitungsstand: 16. August 2024. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Steifigkeit&oldid=247745481> (abgerufen am 2.12.2024)
- [34] Wikipedia – Die freie Enzyklopädie: Finite-Elemente-Methode. Bearbeitungsstand: 11. Oktober 2024. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Finite-Elemente-Methode&oldid=249322656> (abgerufen am 2.12.2024)
- [35] FEM-Programm: <https://structural-analyser.com/> (abgerufen am 2.12.2024)
- [36] FH Münster: Spaghetti unter Spannung – Beitrag zur Pastaforschung. Bearbeitungsstand: 28.06.2012. URL: <https://www.wn.de/muenster/spaghetti-unter-spannung-beitrag-zur-pasta> (abgerufen am 2.12.2024)

o. J. = ohne Jahr

(Viele Webseiten, besonders von Bildungsplattformen, geben nicht immer ein genaues Veröffentlichungsdatum an, es sei denn, es handelt sich um einen bestimmten Artikel oder Beitrag.)

7. Abbildungsverzeichnis

Titelblatt: Veseloski, Duran, eigenes Bild, geschossen am 15. Oktober

Abb. 1: ETH Zürich, 2024. URL: https://block.arch.ethz.ch/eq/files/Figur%204_Belastungsarten_1475680157.pdf (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 2: ETH Zürich, 2024. URL: https://block.arch.ethz.ch/eq/files/Figur%204_Belastungsarten_1475680157.pdf (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 3: Universität Siegen, 2022. URL: <https://www.bau.uni-siegen.de/subdomains/bauinformatik/lehre/tm1/arbeitsblaetter/balkenrahmenbogen-i.pdf> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 4: Veseloski, Duran: Eigene Skizze (erstellt am 2.12.2024)

Abb. 5: StudyHelp, (o. J.). URL: <https://www.studyhelp.de/online-lernen/mechanik/flaechentraegheitsmomente-bestimmen/> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 6: Studyflix. 2018. URL <https://studyflix.de/ingenieurwissenschaften/mechanische-spannungen-1060> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 7: Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, 17. Juli 2024. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Mechanische_Spannung&oldid=246836849 (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 8: Ingenieurkurse, (o. J.). URL: <https://www.ingenieurkurse.de/baustatik-1/verformungen/verformung-infolge-dehnung/dehnungen-im-stab.html> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 9: Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, 8. Oktober 2024. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Elastizit%C3%A4tsmodul&oldid=249260069> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 10: Maschinenbau-Wissen, 2009. URL: [Biegung – Arten der Biegung & Biegetheorien](#) (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 11: Wikipedia – The Free Encyclopedia, 25.01.2024. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Deflection_\(engineering\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Deflection_(engineering)) (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 12: Ingenieurkurse, (o. J.). URL: <https://www.ingenieurkurse.de/baustatik-1/verformungen/verformung-infolge-biegung/verformung-infolge-reiner-biegung/spannung-und-dehnung-bei-reiner-biegung.html> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 13: Polymer Service Merseburg, 13. August 2019. URL: <https://wiki.polymerservice-merseburg.de/index.php/Randfaserdehnung> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 14: Ingenieurkurse, (o. J.). URL: <https://www.ingenieurkurse.de/baustatik-1/verformungen/verformung-infolge-biegung/verformung-infolge-reiner-biegung/spannung-und-dehnung-bei-reiner-biegung.html> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 15: Ingenieurkurse, (o. J.). URL: <https://www.ingenieurkurse.de/baustatik-1/verformungen/verformung-infolge-biegung/verformung-infolge-reiner-biegung/spannung-und-dehnung-bei-reiner-biegung.html> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 16: StudyHelp, (o. J.). URL: <https://www.studyhelp.de/online-lernen/mechanik/auflegerreaktionen-bestimmen/> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 17: Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, 21. August 2023. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Einfeldtr%C3%A4ger&oldid=236613645> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 18: Ingenieurkurse, (o. J.). URL: <https://www.ingenieurkurse.de/technische-mechanik-statik/schnittmethode-und-schnittgroessen/schnittgroessen-linienfoermiger-tragwerke/schnittgroessen-am-balken/schnittgroessen-verteilte-lasten-am-balken/schnittgroessen-anhand-der-gleichgewichtsbedingungen.html> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 19: Ingenieurkurse, (o. J.). URL: <https://www.ingenieurkurse.de/technische-mechanik-statik/schnittmethode-und-schnittgroessen/schnittgroessen-linienfoermiger-tragwerke/schnittgroessen-am-balken/schnittgroessen-verteilte-lasten-am-balken/schnittgroessen-anhand-der-gleichgewichtsbedingungen.html> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 20: Ingenieurkurse, (o. J.). URL: <https://www.ingenieurkurse.de/technische-mechanik-statik/schnittmethode-und-schnittgroessen/schnittgroessen-linienfoermiger-tragwerke/schnittgroessen-am-balken/schnittgroessen-verteilte-lasten-am-balken/schnittgroessen-anhand-der-gleichgewichtsbedingungen.html> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 21: Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, 12. Juni 2024. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Querkraft> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 22: Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, 12. Juni 2024. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Querkraft> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 23: LibreTexts, 2. Januar 2020. URL: [https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Civil_Engineering/Structural_Analysis_\(Udoeyo\)/01%3A_Chapters/1.12%3A_Moment_Distribution_Method_of_Analysis_of_Structures](https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Civil_Engineering/Structural_Analysis_(Udoeyo)/01%3A_Chapters/1.12%3A_Moment_Distribution_Method_of_Analysis_of_Structures) (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 24: LibreTexts, 2. Januar 2020. URL: [https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Civil_Engineering/Structural_Analysis_\(Udoeyo\)/01%3A_Chapters/1.12%3A_Moment_Distribution_Method_of_Analysis_of_Structures](https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Civil_Engineering/Structural_Analysis_(Udoeyo)/01%3A_Chapters/1.12%3A_Moment_Distribution_Method_of_Analysis_of_Structures) (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 25 - 54: Veseloski, Duran: Eigene Bilder, geschossen während dem Arbeitsprozess, Juli – Oktober

Abb. 55: Ingenieurkurse, (o. J.). URL: <https://www.ingenieurkurse.de/technische-mechanik-elastostatik/balkenbiegung/einachsige-biegung/reine-biegung/reine-biegung.html> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 56: Science Easy, 14.02.2021. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=eElqxiVTntwm> (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 57: Ingenieurkurse, (o. J.). URL: [https://www.ingenieurkurse.de/technische-mechanik-
elastostatik/balkenbiegung/flaechentraegheitsmomente/flaechentraegheitsmomente-in-ab-
haengigkeit-vom-koordinatensystem.html](https://www.ingenieurkurse.de/technische-mechanik-
elastostatik/balkenbiegung/flaechentraegheitsmomente/flaechentraegheitsmomente-in-ab-
haengigkeit-vom-koordinatensystem.html) (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 58: Pickedshares, (o. J.). URL: [https://pickedshares.com/technische-mechanik-trager-
mit-streckenlast-einzellast-und-moment/](https://pickedshares.com/technische-mechanik-trager-
mit-streckenlast-einzellast-und-moment/) (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 59: StackExchange, 21.04.2017. URL: [https://engineering.stackexchange.com/questi-
ons/14888/fixed-end-moment](https://engineering.stackexchange.com/questi-
ons/14888/fixed-end-moment) (abgerufen am 2.12.2024)

Abb. 60 - 62: Veseloski, Duran: Eigene Bilder, geschossen während dem Arbeitsprozess, Juli –
Oktober

o. J. = ohne Jahr

8. Anhang

Resultate des Statikprogramms Frilo: Einfeldträger:

Demo Frilo

Stuttgarter Straße 40
70469 Stuttgart

Tel.: 0711 810020
Fax: 0711 858020

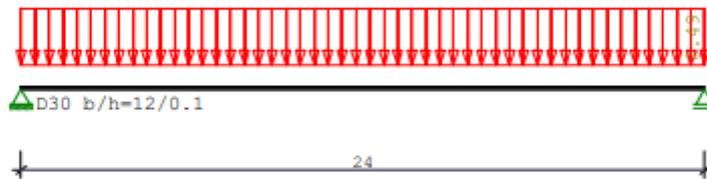
Projekt: Badisch Bahnhof Wichmann
Position: Duran_2_Holz_Einfachbalken
27.11.2024

Seite: 1

Position: Duran_2_Holz_Einfachbalken Duran_2_Holz_Einfachbalken

Durchlaufträger DLT10 02/2020/B (Frilo R-2020-2/P12)

Maßstab 1 : 2



Holzträger D30
Mit Schubverformung gerechnet: $G = 600 \text{ N/mm}^2$

System	Länge	Querschnittswerte			
		L (m)	b (cm)	h (cm)	Iy (cm4)
1	0.24	konstant	12.0	0.1	0.0

Feld	Typ	EG	Gr	Belastung (kN,m)				ausPOS	Phi
				g _{l/r}	q _{l/r}	Faktor	Abstand		
1	1	A	0.00	0.49	1.00				

Einwirkungen:							
Nr	Kl	Bezeichnung	ψ0	ψ1	ψ2	γ	KLED
A	1	Wohnräume	0.70	0.50	0.30	1.50	mittel

In den folgenden Tabellen steht am Ende der Zeilen ein Verweis auf die Nummer der zug. Überlagerung (siehe unten).
In Tabellen mit Gammafachen Schnittgrößen steht zusätzlich ein Verweis auf die Leiteinwirkung.

Ergebnisse für 1-fache Lasten							
Die Schnittgrößen sind mit Schubverformung gerechnet.							
Feldmomente Maximum							(kNm , kN)
Feld	x0 =	Mf	M li	M re	V li	V re	komb
1	0.12	0.00	0.00	0.00	0.06	-0.06	2

Feldmomente Minimum							(kNm , kN)
Feld	x0 =	Mf	M li	M re	V li	V re	komb
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1

Stützmomente Maximum							(kNm , kN)
Stütze	M li	M re	V li	V re	max F	min F	komb
1	0.00	0.00	0.00	0.06	0.06	0.00	2
2	0.00	0.00	-0.06	0.00	0.06	0.00	2

Demo Frilo

Stuttgarter Straße 40
70469 Stuttgart

Tel.: 0711 810020
Fax: 0711 858020

Projekt: Badisch Bahnhof Wichmann
Position: Duran_2_Holz_Einfachbalken
27.11.2024

Seite: 2

Stützmomente Minimum						(kNm , kN)
Stütze	M li	M re	V li	V re	F	komb
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1

Auflagerkräfte							(kN)
Stütze	aus g	max q	min q	Vollast	max	min	
1	0.00	0.06	0.00	0.06	0.06	0.00	
2	0.00	0.06	0.00	0.06	0.06	0.00	
Summe:	0.00	0.12	0.00	0.12	0.12	0.00	

Auflagerkräfte					(kN)
EG	Stütze 1		Stütze 2		
	max	min	max	min	
g	0.0	0.0	0.0	0.0	
A	0.1	0.0	0.1	0.0	
Sum	0.1	0.0	0.1	0.0	

Ergebnisse für γ -fache Lasten
Teilsicherheitsbeiwert $\gamma_G = 1.35$ feldweise konstant

Feldmomente Maximum							(kNm , kN)
Feld	Mfd	Mdli	Mdre	V li	V re	komb	
1 x0 =	0.12	0.01	0.00	0.00	0.09	-0.09 A 2	

Feldmomente Minimum							(kNm , kN)
Feld	Mfd	Mdli	Mdre	V li	V re	komb	
1 x0 =	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1	

Stützmomente Maximum							(kNm , kN)
Stütze	Mdli	Mdre	Vdli	Vdre	max F	min F	komb
1	0.00	0.00	0.00	0.09	0.09	0.00	A 2
2	0.00	0.00	-0.09	0.00	0.09	0.00	A 2

Stützmomente Minimum							(kNm , kN)
Stütze	Mdli	Mdre	Vdli	Vdre	F	komb	
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	A 2	
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1	

Demo Frilo

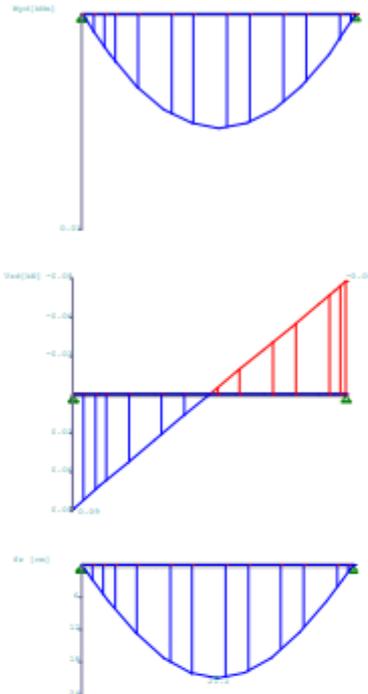
Stuttgarter Straße 40
70469 Stuttgart

Tel.: 0711 810020
Fax: 0711 858020

Projekt: Badisch Bahnhof Wichmann
Position: Duran_2_Holz_Einfachbalken
27.11.2024

Seite: 3

Maßstab 1 : 5



Bemessung: DIN 1052:2008 D30
Nutzungsklasse 1 kdef = 0.60 $\gamma_M = 1.30$ $\gamma_M(A) = 1.00$



$E_{mean} = 1000 \text{ kN/cm}^2$ $G_{mean} = 60 \text{ kN/cm}^2$
 $f_{m,k}, My = 30.0 \text{ N/mm}^2$ $f_{m,k}, Mz = 30.0 \text{ N/mm}^2$
 $f_{v,k}, Vz = 3.0 \text{ N/mm}^2$ $f_{v,k}, Vy = 3.0 \text{ N/mm}^2$

Spannungen mit FLBemHo901 gerechnet. (Version 9.0.4.8)
 Normalspannungen $b/h = 12/0.1$

Der Druckgurt ist nur an den Auflagern gehalten.

Feld Nr.	x (m)	$M_{y,d}$ (kNm)	$\sigma_{d,o}$ (N/mm ²)	$\sigma_{d,u}$ (N/mm ²)	k_m	k_{mod}	$\sigma_d/f_{m,d}$	komb
1	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1
	0.12	0.01	-264.60	264.60	1.00	0.80	14.33 !	A 2
	0.24	0.00	0.00	0.00	1.00	0.80	0.00	A 2

Schubspannungen $b/h = 12/0.1$

Stütze Nr.	x (m)	$V_{z,d}$ (kN)	τ_D (N/mm ²)	k_{mod}	$\tau_d/f_{v,d}$	komb
1 re	0.001	0.09	1.09	0.80	0.59	A 2
2 li	0.001	-0.09	1.09	0.80	0.59	A 2

Demo Frilo

Stuttgarter Straße 40
70469 Stuttgart

Tel.: 0711 810020
Fax: 0711 858020

Projekt: Badisch Bahnhof Wichmann
Position: Duran_2_Holz_Einfachbalken
27.11.2024

Seite: 4

Nachweis Gebrauchstauglichkeit nach DIN 1052:2008 $k_{def} = 0.60$
 zul $w_{q,inst} < L/300$ $w_{fin,rare} - w_{q,inst} < L/200$ $w_{fin,perm} < L/200$

Feld Nr.	x (m)	wg		wq			wfin		η	komb
		inst	fin (cm)	inst	rare (cm)	perm	rare (cm)	perm (cm)		
1	0.12	0.00	0.00	21.17	24.99	10.16	24.99	10.16	264.67! !	A 2

Größte Durchbiegung nach DIN 1052:2008 9.3 in Feld 1 **f = 63.5 mm!!!**
 Durchbiegung infolge F = 1.0 kN in Feld 1 **f = 2881.0 mm !!!**

In der folgenden Tabelle sind die Lasten mit der internen Numerierung angegeben. Die anschließende Tabelle der gerechneten Kombinationen referenziert auf diese Nummern.

Belastung (kN,m)	Lasttyp:	1=Gleichlast über L		2=Einzellast bei a						
		3=Einzelmoment bei a		4=Trapezlast von a - a+b						
		5=Dreieckslast über L		6=Trapezlast über L						
Nr.	Feld	Typ	Grp	g1	q1	g2	q2	Faktor	Abstand	Länge
1	1	1	A 1	0.00	0.49			1.00		

Gerechnete Kombinationen aus 1 Lasten

Last	K1	K2
1	g	g
	.	x

Die vorstehenden Kombinationen werden wie folgt bearbeitet:
 Beim Nachweis der Tragsicherheit werden die ständigen Lasten je einzeln alternierend mit $\gamma_G = 1,00 / 1,35$ beaufschlagt.
 Wenn in einer Kombination p-Lasten aus unterschiedlichen Einwirkungen vorhanden sind, dann wird jeweils untersucht, welche Einwirkung die Leiteinwirkung ist.
 Die Auswirkung der Lasteinwirkungsdauer wird ebenfalls geprüft.

Zweifeldträger:

Demo Frilo

Stuttgarter Straße 40
70469 Stuttgart

Tel.: 0711 810020
Fax: 0711 858020

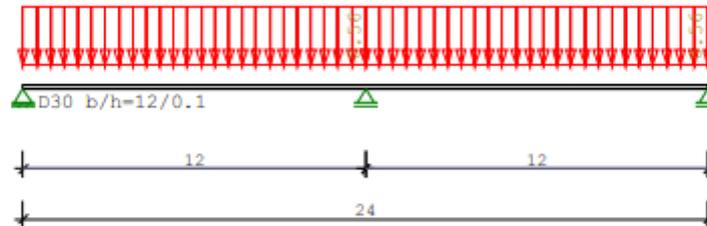
26.11.2024

Seite: 1

Position:

Durchlaufträger DLT10 02/2020/B (Frilo R-2020-2/P12)

Maßstab 1 : 2



Holzträger über 2 Felder D30
Mit Schubverformung gerechnet: $G = 600 \text{ N/mm}^2$

System	Länge	Querschnittswerte			
Feld	L (m)	b (cm)	h (cm)	I_y (cm ⁴)	
1	0.12	konstant	12.0	0.1	0.0
2	0.12	konstant	12.0	0.1	0.0

Feld	Typ	EG	Gr	Lasttyp:			Abstand	Länge	ausPOS	Phi
				g _{l/r}	q _{l/r}	Faktor				
1	1	A		0.00	0.56	1.00				
2	1	A		0.00	0.56	1.00				

Einwirkungen:							
Nr	Kl	Bezeichnung	ψ_0	ψ_1	ψ_2	γ	KLED
A	1	Wohnräume	0.70	0.50	0.30	1.50	mittel

In den folgenden Tabellen steht am Ende der Zeilen ein Verweis auf die Nummer der zug. Überlagerung (siehe unten).
In Tabellen mit Gammafachen Schnittgrößen steht zusätzlich ein Verweis auf die Leiteinwirkung.

Ergebnisse für 1-fache Lasten

Die Schnittgrößen sind mit Schubverformung gerechnet.

Feldmomente Maximum		(kNm , kN)					
Feld		Mf	M li	M re	V li	V re	komb
1	x0 = 0.05	0.00	0.00	0.00	0.03	-0.04	2
2	x0 = 0.07	0.00	0.00	0.00	0.04	-0.03	3

Feldmomente Minimum		(kNm , kN)					
Feld		Mf	M li	M re	V li	V re	komb
1	x0 = 0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1
2	x0 = 0.12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1

Demo Frilo

Stuttgarter Straße 40
70469 Stuttgart

Tel.: 0711 810020
Fax: 0711 858020

26.11.2024

Seite: 2

Stützmomente Maximum							(kNm , kN)	
Stütze	M li	M re	V li	V re	max F	min F	komb	
1	0.00	0.00	0.00	0.03	0.03	0.00	2	
2	0.00	0.00	-0.04	0.04	0.08	0.00	4	
3	0.00	0.00	-0.03	0.00	0.03	0.00	3	

Stützmomente Minimum							(kNm , kN)	
Stütze	M li	M re	V li	V re	F	komb		
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2		
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1		
3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1		

Auflagerkräfte							(kN)	
Stütze	aus g	max q	min q	Vollast	max	min		
1	0.00	0.03	0.00	0.03	0.03	0.00		
2	0.00	0.08	0.00	0.08	0.08	0.00		
3	0.00	0.03	0.00	0.03	0.03	0.00		
Summe:	0.00	0.14	-0.01	0.13	0.14	-0.01		

Auflagerkräfte							(kN)	
EG	Stütze 1		Stütze 2		Stütze 3			
	max	min	max	min	max	min		
g	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
A	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0		
Sum	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0		

Ergebnisse für γ -fache Lasten
Teilsicherheitsbeiwert $\gamma_G = 1.35$ feldweise konstant

Feldmomente Maximum							(kNm , kN)	
Feld	Mfd	Mdli	Mdre	V li	V re	komb		
1 $x_0 =$	0.05	0.00	0.00	0.00	0.04	-0.06	A 2	
2 $x_0 =$	0.07	0.00	0.00	0.00	0.06	-0.04	A 3	

Feldmomente Minimum							(kNm , kN)	
Feld	Mfd	Mdli	Mdre	V li	V re	komb		
1 $x_0 =$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1	
2 $x_0 =$	0.12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1	

Stützmomente Maximum							(kNm , kN)	
Stütze	Mdli	Mdre	Vdli	Vdre	max F	min F	komb	
1	0.00	0.00	0.00	0.04	0.04	-0.01	A 2	
2	0.00	0.00	-0.06	0.06	0.13	0.00	A 4	
3	0.00	0.00	-0.04	0.00	0.04	-0.01	A 3	

Demo Frilo

Stuttgarter Straße 40
70469 Stuttgart

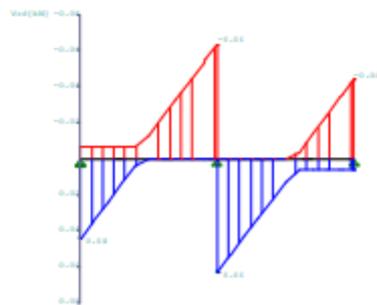
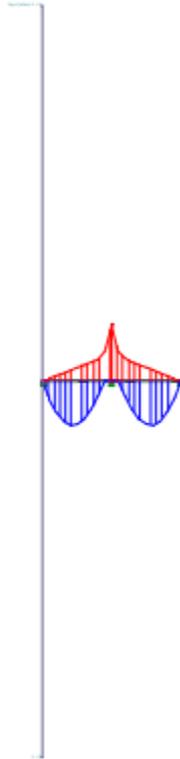
Tel.: 0711 810020
Fax: 0711 858020

26.11.2024

Seite: 3

Stützmomente Minimum						(kNm , kN)	
Stütze	Mdli	Mdre	Vdli	Vdre	F	komb	
1	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.01	A 2	
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1	
3	0.00	0.00	0.01	0.00	-0.01	1	

Maßstab 1 : 10



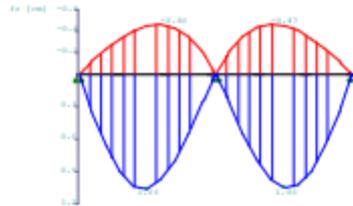
Demo Frilo

Stuttgarter Straße 40
70469 Stuttgart

Tel.: 0711 810020
Fax: 0711 858020

26.11.2024

Seite: 4



Bemessung: DIN 1052:2008 D30

Nutzungsklasse 1 $k_{def} = 0.60$ $\gamma_M = 1.30$ $\gamma_M(A) = 1.00$



$E_{mean} = 1000 \text{ kN/cm}^2$ $G_{mean} = 60 \text{ kN/cm}^2$
 $f_{m,k}, M_y = 30.0 \text{ N/mm}^2$ $f_{m,k}, M_z = 30.0 \text{ N/mm}^2$
 $f_{v,k}, V_z = 3.0 \text{ N/mm}^2$ $f_{v,k}, V_y = 3.0 \text{ N/mm}^2$

Spannungen mit FLBemHo901 gerechnet. (Version 9.0.4.8)
 Normalspannungen $b/h = 12/0.1$

Feld Nr.	x (m)	$M_{y,d}$ (kNm)	$\sigma_{d,o}$ (N/mm ²)	$\sigma_{d,u}$ (N/mm ²)	k_m	k_{mod}	$\sigma_d/f_{m,d}$	komb
1	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1
	0.05	0.00	-57.67	57.67	1.00	0.80	3.12 !	A 2
	0.06	0.00	-57.84	57.84	1.00	0.80	3.13 !	A 2
	0.12	0.00	75.71	-75.71	1.00	0.80	4.10 !	A 4
2	0.00	0.00	75.71	-75.71	1.00	0.80	4.10 !	A 4
	0.07	0.00	-57.46	57.46	1.00	0.80	3.11 !	A 3
	0.12	0.00	0.00	0.00	1.00	0.80	0.00	A 3

Schubspannungen $b/h = 12/0.1$

Stütze Nr.	x (m)	$V_{z,d}$ (kN)	τ_D (N/mm ²)	k_{mod}	$\tau_d/f_{v,d}$	komb
1 re	0.001	0.04	0.54	0.80	0.29	A 2
2 li	0.001	-0.06	0.78	0.80	0.42	A 4
re	0.001	0.06	0.78	0.80	0.42	A 4
3 li	0.001	-0.04	0.54	0.80	0.29	A 3

Nachweis Gebrauchstauglichkeit nach DIN 1052:2008 $k_{def} = 0.60$
 zul $w_{q,inst} < L/300$ $w_{fin,rare} - w_{q,inst} < L/200$ $w_{fin,perm} < L/200$

Feld Nr.	x (m)	inst	$w_{q,fin}$ (cm)	inst	$w_{q,rare}$ (cm)	perm	rare	$w_{q,fin}$ (cm)	perm	η	komb
1	0.06	0.00	0.00	1.06	1.26	0.51	1.26	0.51	26.60 !	A 2	
2	0.06	0.00	0.00	1.06	1.25	0.51	1.25	0.51	26.51 !	A 3	

Größte Durchbiegung nach DIN 1052:2008 9.3 in Feld 1 $f = 3.2 \text{ mm}$
 Durchbiegung infolge $F = 1.0 \text{ kN}$ in Feld 1 $f = 259.3 \text{ mm} !!!$

Demo Frilo

Stuttgarter Straße 40
70469 Stuttgart

Tel.: 0711 810020
Fax: 0711 858020

26.11.2024

Seite: 5

In der folgenden Tabelle sind die Lasten mit der internen Numerierung angegeben. Die anschließende Tabelle der gerechneten Kombinationen referenziert auf diese Nummern.

Belastung (kN,m)	Lasttyp:	1=Gleichlast über L 3=Einzelmoment bei a 5=Dreieckslast über L				2=Einzellast bei a 4=Trapezlast von a - a+b 6=Trapezlast über L		
		g1	q1	g2	q2	Faktor	Abstand	Länge
1	1 1 A 1	0.00	0.56			1.00		
2	2 1 A 2	0.00	0.56			1.00		

Gerechnete Kombinationen aus 2 Lasten

Last	K1	K2	K3	K4
	g	g	g	g
1	.	x	.	x
2	.	.	x	x

Die vorstehenden Kombinationen werden wie folgt bearbeitet:
Beim Nachweis der Tragsicherheit werden die ständigen Lasten je einzeln alternierend mit $\gamma_G = 1,00 / 1,35$ beaufschlagt.
Wenn in einer Kombination p-Lasten aus unterschiedlichen Einwirkungen vorhanden sind, dann wird jeweils untersucht, welche Einwirkung die Leiteinwirkung ist.
Die Auswirkung der Lasteinwirkungsdauer wird ebenfalls geprüft.